DẠNG 1 Mở đầu về khối đa diện

Câu 1: Khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V, $AB=a$, $CD=b$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD là α khoảng cách giữa chúng bằng c. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\dfrac{abc\sin\alpha}{6}$. **B.** $V=\dfrac{abc\sin\alpha}{2}$. **C.** $V=\dfrac{abc\sin\alpha}{3}$ **D.** $V=abc\sin\alpha$.

Câu 2: Khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V, $AB=a$ góc giữa hai mặt phẳng (CAB) và (DAB) bằng α. Các tam giác CAB, DAB có diện tích lần lượt là S_1 và S_2. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{a}$. **B.** $V=\dfrac{4S_1S_2\sin\alpha}{3a}$. **C.** $V=\dfrac{4S_1S_2\sin\alpha}{a}$ **D.** $V=\dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, còn cạnh bên SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc $30°$. Thể tích của hình chóp đó bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh a. Các mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy, còn cạnh bên SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $30°$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 5: Cho một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và diện tích xung quanh gấp đôi diện tích đáy. Khi đó thể tích của hình chóp bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 6: Nếu một hình chóp đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần thì thể tích của nó tăng lên

A. n^2 lần. **B.** $2n^2$ lần. **C.** n^3 lần. **D.** $2n^3$ lần.

Câu 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'=2$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB',CC', lần lượt bằng 1 và 2; khoảng cách C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 4 **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 8: Cho khối tứ diện $O.ABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc thỏa mãn $OA^2+OB^2+OC^2=12$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $O.ABC$ bằng

A. 8. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** 4 **D.** $\dfrac{8}{3}$.

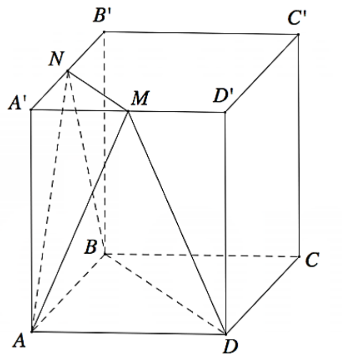
Câu 9: Thể tích của khối chóp cụt có diện tích hai đáy lần lượt là S_1,S_2 có chiều cao bằng h là

A. $h(S_1+S_2-\sqrt{S_1S_2})$. **B.** $\dfrac{h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})}{3}$. **C.** $\dfrac{h(S_1+S_2-\sqrt{S_1S_2})}{3}$ **D.** $h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$.

Câu 10: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh $a, BAD = 60^0$ và có chiều cao bằng $2a\sqrt{3}$ Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'D'$. Tính thể tích khối đa diện $ABDA'MN$

A. $\frac{7a^3}{8}$. **B.** $\frac{3a^3}{4}$. **C.** $\frac{5a^3}{8}$ **D.** $\frac{2a^3}{8}$.

Câu 11: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a$, $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc $BAD = 60^o$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh $A'D'$ và $A'B'$. Thể tích khối chóp $A.BDMN$ là:



A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{16}$. **B.** $\frac{3a^3}{16}$.

C. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{16}$. **D.** $\frac{a^3}{16}$.

Câu 12: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P, Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{96}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{32}$.

Câu 13: Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và thỏa mãn $OA + OB + OC = 6$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $OABC$ bằng

A. 8. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 4. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích đáy bằng S, chiều cao bằng h. Thể tích khối tứ diện $A'ABD$ bằng

A. $\frac{Sh}{4}$. **B.** $\frac{Sh}{6}$. **C.** $\frac{Sh}{2}$. **D.** $\frac{Sh}{3}$.

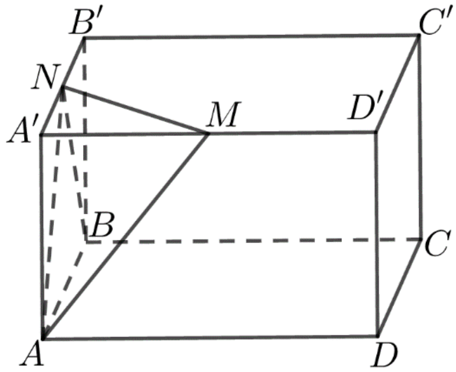
Câu 15: Cho hình lăng trụ đều có độ dài cạnh đáy bằng a. Chiều cao của hình lăng trụ bằng h, điện tích một mặt đáy là S. Tổng khoảng cách từ một điểm trong hình lăng trụ tới tất cả các mặt của hình lằng trụ bằng

A. $h + \frac{2S}{a}$. **B.** $h + \frac{3S}{a}$. **C.** $\frac{2S}{a}$. **D.** $\frac{3S}{a}$.

Câu 16: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều $a, AA' = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB' và G là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng (MNG) cắt CA, CB lần lượt tại E, F. Thể tích khối đa diện có 6 đỉnh là A, B, M, N, E, F bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}a^3}{9}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{27}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}a^3}{27}$.

Câu 17: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a$, $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $BAD = 60^o$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh $A'D'$ và $A'B'$. Tính thể tích khối chóp $A.BDMN$.



A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **B.** $\frac{3a^3}{16}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$. **D.** $\frac{a^3}{16}$.

Câu 18: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P. Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{7a^3\sqrt{3}}{96}$. **D.** $\frac{7a^3\sqrt{3}}{32}$.

Câu 19: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a$; $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc $BAD = 60^0$. Gọi $M;N$ lần lượt là trung điểm của A'D'; $A'B'$. Tính thể tích khối đa diện $BCD.MNB'C'D'$.

A. $\frac{3a^3}{16}$. **B.** $\frac{7a^3}{32}$. **C.** $\frac{9a^3}{16}$. **D.** $\frac{17a^3}{32}$.

Câu 20: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 72. Gọi M là trung điểm của cạnh $A'B'$; các điểm N,P thỏa mãn $\overrightarrow{B'N} = \frac{3}{4}\overrightarrow{B'C'}; \overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. Đường thẳng NP cắt BB' tại E, đường thẳng ME cắt AB tại Q. tính thể tích khối đa diện $AQPC.C'A'MN$.

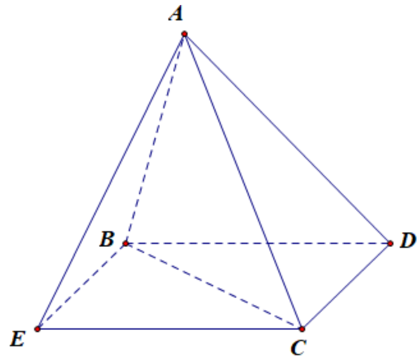
A. 55. **B.** 59. **C.** 52. **D.** 56.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	**2.D**	**3.D**	**4.A**	**5.A**	**6.C**	**7.A**	**8.B**	**9.B**	**10.A**
11.B	**12.C**	**13.B**	**14.B**	**15.A**	**16.A**	**17.B**	**18.C**	**19.D**	**20.B**

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A



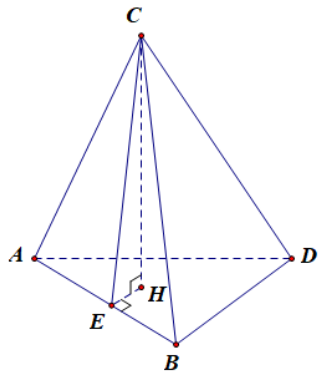
Dựng điểm E sao cho tứ giác $BDCE$ là hình bình hành. Khi đó

$CD//BE \Rightarrow CD//(ABE) \Rightarrow d(AB,CD)=d(C,(ABE))=c$; $(AB,CD)=(AB,BE)=\alpha$.

$S_{\Delta ABE}=\frac{1}{2}AB.BE.\sin(AB,BE)=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

Vậy $V_{ABCD}=V_{C.ABE}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABE}.d(C,(ABE))=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}ab\sin\alpha.c=\frac{abc\sin\alpha}{6}$.

Câu 2: Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên (ABD) và E là hình chiếu vuông góc của H trên AB. Khi đó

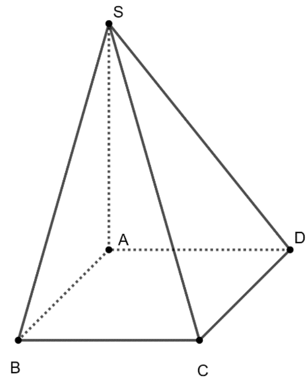
$((CAB),(DAB))=(HE,CE)=CEH=\alpha$.

$\begin{cases} CH\perp AB \\ HE\perp AB \end{cases}\Rightarrow CE\perp AB$. Do đó $S_{\Delta ABC}=\frac{CE.AB}{2}\Rightarrow CE=\frac{2S_{\Delta ABC}}{AB}=\frac{2S_1}{a}$.

ΔCEH vuông tại H có $\frac{CH}{CE}=\sin CEH=\sin\alpha \Rightarrow CH=CE.\sin\alpha=\frac{2S_1\sin\alpha}{a}$.

Vậy $V_{ABCD}=V_{C.ABD}=\frac{1}{3}.S_{\Delta DAB}.CH=\frac{1}{3}.S_2.\frac{2S_1\sin\alpha}{a}=\frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$.

Câu 3: **Chọn D**



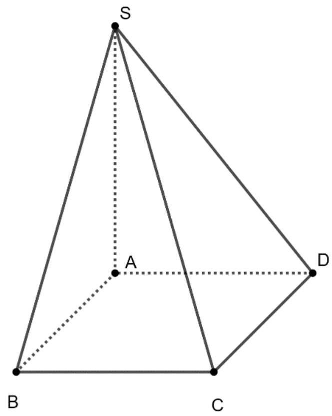
Ta có $\left.\begin{matrix} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow CB \perp (SAB)$.

Suy ra góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) là $CSB = 30°$.

Do đó, $SB = CB.\cot 30° = a\sqrt{3}$. Suy ra $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

Vì vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

Câu 4: **Chọn A**



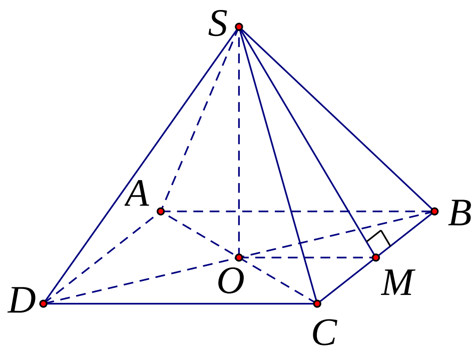
Do $\left.\begin{matrix} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

Suy ra góc giữa SC với mặt phẳng đáy là $SCA = 30°$.

Suy ra $SA = AC.\tan 30° = a\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{\sqrt{6}}{9}a^3$.

Câu 5: **Chọn A**



Giả sử hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O. Đặt $SO = h$.

Gọi M là trung điểm BC.

Ta có $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$.

$S_{xq} = 4S_{\Delta SBC} = 4.\frac{1}{2}.SM.BC = 2.\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}.a$

Có $S_{xq} = 2S_{day} \Leftrightarrow 2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}a = 2a^2 \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 6: **Chọn C**

Ta chỉ xét hai hình chóp đều tam giác, tứ giác

Trường hợp 1: Hình chóp đều tam giác có cạnh đáy bằng a và chiều cao h.

Thể tích khối chóp tam giác đều ban đầu: $V_1 = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.h$.

Thể tích khối chóp sau khi tăng chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần: $V_2 = \frac{1}{3}.\frac{(na)^2\sqrt{3}}{4}.nh = n^3V_1$.

Kết luận: một hình chóp tam giác đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần thì thể tích của nó tăng lên n^3 lần.

Trường hợp 2: Hình chóp đều tứ giác có cạnh đáy bằng a và chiều cao h.

Thể tích khối chóp tứ giác đều ban đầu: $V_1 = \frac{1}{3}.a^2.h$.

Thể tích khối chóp tứ giác đều sau khi tăng chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần: $V_2 = \frac{1}{3}.(na)^2.nh = n^3V_1$.

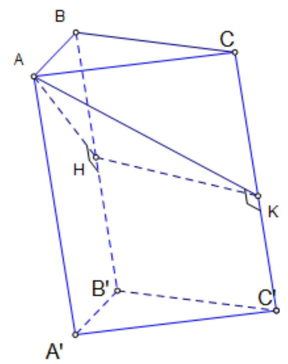
Kết luận: một hình chóp tứ giác đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần thì thể tích của nó tăng lên n^3 lần.

Kết luận: Nếu một hình chóp đều có chiều cao và cạnh đáy cùng tăng lên n lần thì thể tích của nó tăng lên n^3 lần.

Nhận xét: Ta có thể dùng một kết quả quen thuộc

- Nếu ta tăng các kích thước của đa giác lên k lần thì diện tích đa giác sẽ tăng lên k^2 lần.
- Nếu tăng diện tích đáy của khối chóp lên k^2 lần và chiều cao k lần thì thể tích khối chóp sẽ tăng lên k^3 lần.

Câu 7: **Chọn A**



Gọi H,K làn lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB',CC' ta có $AH = d(A,BB') = 1, AK = d(A,CC') = 2$ và $AH^2 + AK^2 = HK^2 = 5 \Rightarrow \Delta AHK$ vuông tại $A \Rightarrow S_{AHK} = \frac{1}{2}AH.AK = 1$. Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{AHK}.AA' = 2$.

Câu 8: **Chọn B**

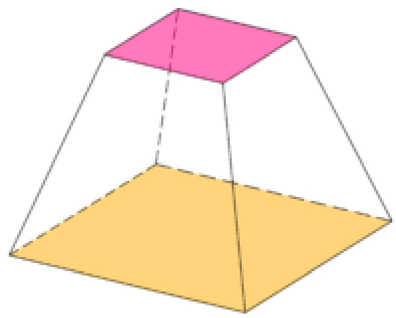
Ta có $V_{O.ABC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC$.

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM có

$12 = OA^2 + OB^2 + OC^2 \ge 3\sqrt[3]{OA^2.OB^2.OC^2} \Rightarrow OA.OB.OC \le 8 \Rightarrow V_{O.ABC} \le \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

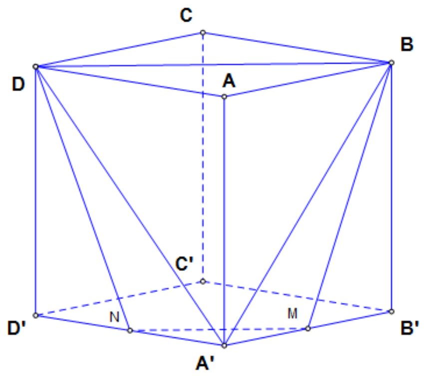
Câu 9: **Chọn B**

Thể tích hình chóp cụt là $\frac{h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})}{3}$



Câu 10: **Chọn A**

Chú ý: $ABDA'MN$ là một hình chóp cụt có hai tam giác đáy $\Delta ABD, \Delta A'MN$.



Do đó $V = \dfrac{h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})}{3}$.

Trong đó, $h = 2a\sqrt{3}$ và $S_1 = S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}, S_2 = S_{A'MN} = \dfrac{1}{4}S_{A'B'D'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$

Vậy $V = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16} + \sqrt{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}}\right) = \dfrac{7a^2}{8}$.

Câu 11: Chọn B

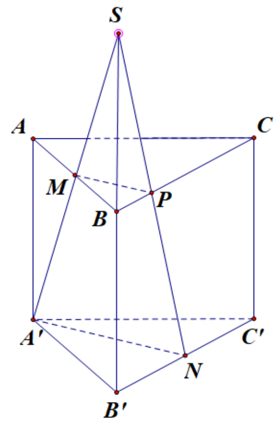
Ta có: $V_{A.A'MN} = \dfrac{1}{3}S_{A'MN} \cdot AA' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{2}.\sin 60^0\right)\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{32}$.

Khối chóp cụt $ABD.A'MN$ có $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, S_1 = S_{ABD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}, S_2 = S_{A'MN} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

Do đó $V_{ABD.A'MN} = \dfrac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16} + \sqrt{\dfrac{3a^4}{64}}\right) = \dfrac{7a^3}{32}$

Do đó $V_{A.BDMN} = V_{ABD.A'MN} - V_{A.A'MN} = \dfrac{7a^3}{32} - \dfrac{a^3}{32} = \dfrac{3a^3}{16}$.

Câu 12: Chọn C



Ta có $\dfrac{MP}{A'N} = \dfrac{BP}{B'N} = \dfrac{BM}{A'B'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \Delta MBP \sim \Delta A'B'N$ theo tỉ số $\dfrac{1}{2}$

Khối đa diện $MBP.A'B'N$ là khối chóp cụt có chiều cao $h = BB' = a$.

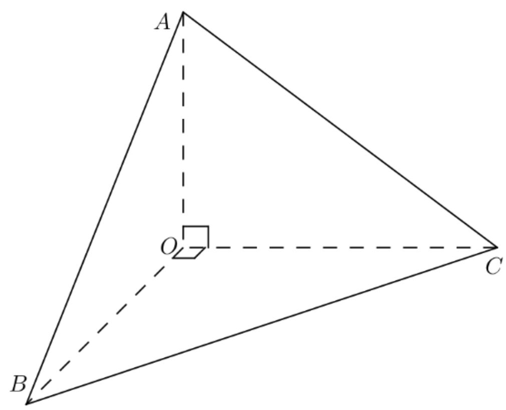
Diện tích hai đáy là :

$S_1 = S_{A'B'N} = \dfrac{1}{2}S_{A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}, S_2 = S_{MBP} = \dfrac{1}{4}S_{A'B'N} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{32}$.

Vậy $V_{MBP\cdot A'B'N} = \dfrac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right) = \dfrac{a}{3}\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{32} + \sqrt{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{32}}\right) = \dfrac{7\sqrt{3}a^3}{96}$.

Câu 13: Chọn B

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm, ta có:



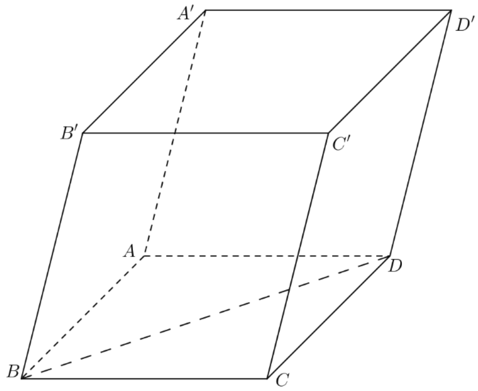
$6 = OA + OB + OC \geq 3\sqrt[3]{OA.OB.OC} \Leftrightarrow OA.OB.OC \leq 8$

Ta có $V_{OABC} = \dfrac{1}{6}OA.OB.OC \leq \dfrac{1}{6}.8 = \dfrac{4}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $OA = OB = OC = 2$.

Vậy V_{OABC} lớn nhất là $\dfrac{4}{3}$.

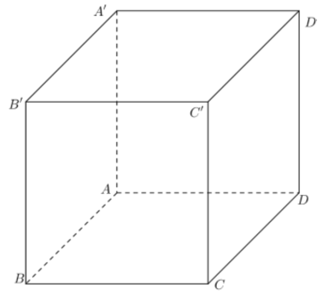
Câu 14: Chọn B



Ta có $S_{ABD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}\Rightarrow V_{A'ABD}=\frac{1}{2}V_{A'.ABCD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.S_{ABCD}.d\left(A';\left(ABCD\right)\right)=\frac{Sh}{6}$.

Câu 15: Chọn A

Xét hình lăng trụ đều (H) đã cho có đáy là đa giác đều n đỉnh. Xét điểm I bất kỳ trong hình lăng trụ đều (H) đã cho. Khi đó nối I với các đỉnh của (H) ta được $n+2$ khối chóp có đỉnh là I, trong đó có hai khối chóp có đáy là hai mặt đáy của (H), và n khối chóp có đáy là các mặt bên của (H). Diện tích của mỗi mặt đáy của (H) là S, diện tích của mỗi mặt bên của (H) bằng ah. Gọi $h_1,h_2,...,h_n,h_{n+1},h_{n+2}$ lần lượt là khoảng cách từ I đến các mặt bên và các mặt đáy của (H). Vậy theo công thức tính thể tích của khối lăng trụ và khối chóp ta có:



$$V_{(H)}=V_1+V_2+...+V_n+V_{n+1}+V_{n+2}\Leftrightarrow Sh=\frac{1}{3}h_1.ah+...+\frac{1}{3}h_n.ah+\frac{1}{3}h_{n+1}.S+\frac{1}{3}h_{n+2}.S$$

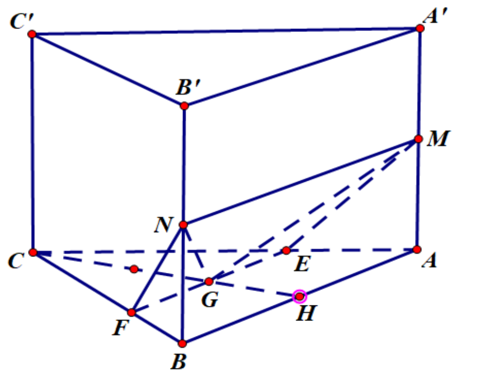
$$\Leftrightarrow S=\frac{1}{3}\left(h_1+h_2+...+h_n\right)a+\frac{1}{3}\underbrace{\left(h_{n+1}+h_{n+2}\right)}_{h}\frac{S}{h}$$

$$\Leftrightarrow S=\frac{1}{3}\left(h_1+h_2+...+h_n\right)a+\frac{S}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left(h_1+h_2+...+h_n\right)a=S-\frac{S}{3}$$

$$\Leftrightarrow h_1+h_2+...+h_n=\frac{2S}{a}\Leftrightarrow h_1+h_2+...+h_n+h_{n+1}+h_{n+2}=\frac{2S}{a}+h.$$

Câu 16: Chọn D

Ta có



$V_1=V_{C.ABNM}=\frac{1}{3}CH.S_{ABNM}=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2=\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

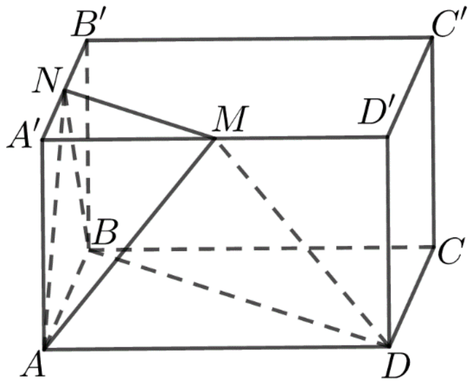
$\begin{cases}MN\subset(GMN)\\AB\subset(ABC)\\AB//MN\end{cases}$.

$\Rightarrow(GMN)\cap(ABC)=EF//AB//MN$

Suy ra $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CH}=\frac{CE}{CA}=\frac{2}{3}$.

Suy ra $\dfrac{V_{C.EFNM}}{V_1}=\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+1+1}{4.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}.1.1}=\dfrac{5}{9}\Rightarrow V_{BFN.AEM}=V_1-V_{C.EFNM}=\dfrac{4}{9}V_1=\dfrac{4}{9}\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}=\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{27}$

Câu 17: Chọn B



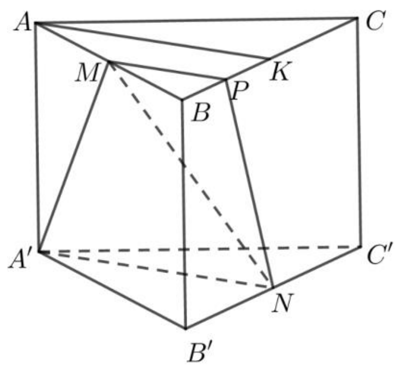
Dễ thấy $A'MN.ADB$ là hình chóp cụt và hai đáy là hai tam giác đều đồng dạng theo tỉ số là $\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $S_{\Delta ADB}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow S_{\Delta A'MN}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta ADB}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$

$\Rightarrow V_{AA'MN}=\dfrac{1}{3}AA'.S_{\Delta A'MN}=\dfrac{a^3}{32}$

$V_{A'MN.ADB}=\dfrac{1}{3}\text{AA}'\left(S_{\Delta A'MN}+S_{\Delta ADB}+\sqrt{S_{\Delta A'MN}.S_{\Delta ADB}}\right)=\dfrac{7a^3}{32}\Rightarrow V_{A.BDMN}=V_{A'MN.ADB}-V_{AA'MN}=\dfrac{3a^3}{16}$.

Câu 18: Chọn C



Ta có $A'N//(ABC)$. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC .Suy ra $AK//A'N$.

Mặt khác $(A'MN)\cap BC=P$ nên P là trung điểm của đoạn thẳng BK.

Dễ thấy $MBP.A'B'N$ là hình chóp cụt và hai đáy là hai tam giác đồng dạng theo tỉ số là $\dfrac{1}{2}$.

Ta có $S_{\Delta A'B'N}=\dfrac{1}{2}A'B'.A'N.\sin 60^o=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}\Rightarrow S_{\Delta MBP}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta A'B'N}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{32}$.

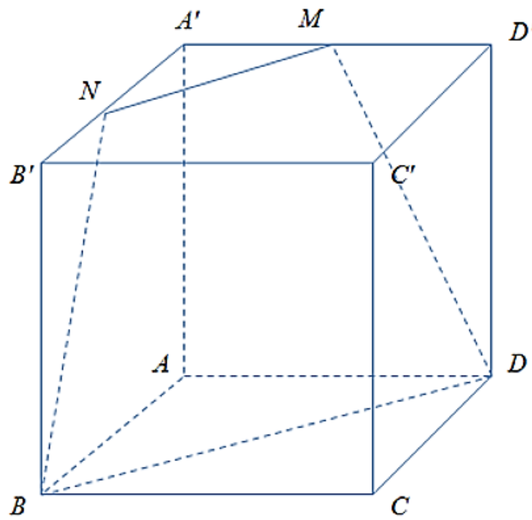
Vậy $V_{MBP.A'B'N}=\dfrac{1}{3}\text{AA}'\left(S_{\Delta MBP}+S_{\Delta A'B'N}+\sqrt{S_{\Delta MBP}.S_{\Delta A'B'N}}\right)=\dfrac{7a^3\sqrt{3}}{96}$.

Câu 19: Chọn D

Đặt: V_1 là thể tích của khối hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$.

V_2 là thể tích của khối chóp cụt $A'MN.ABD$.

V là thể tích của đa diện $BCD.MNB'C'D'$.



Ta có: $V_1=B.h=a.a.\sin 60^0.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3a^3}{4}$

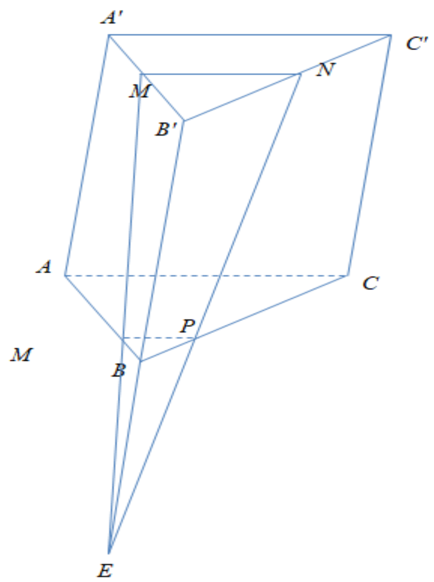
$S_{\Delta A'MN}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta A'B'D'}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16};\ S_{\Delta ABD}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow V_2=\dfrac{h}{3}\left(S_{\Delta A'MN}+S_{\Delta ABD}+\sqrt{S_{\Delta A'MN}.S_{\Delta ABD}}\right)$

$=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}+\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}+\sqrt{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}\right)=\dfrac{7a^3}{32}$

Do đó: $V=V_1-V_2=\frac{3a^3}{4}-\frac{7a^3}{32}=\frac{17a^3}{32}$.

Câu 20: Chọn B



Đặt: V là thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. $\Rightarrow \mathrm{V}=72$.

V_1 là thể tích khối đa diện $AQPC.C'A'MN$.

V_2 là thể tích khối chóp cụt $BQP.B'MN$.

Ta có: $\frac{BP}{B'N}=\frac{BQ}{B'M}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{BQ}{BA}=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow\frac{S_{\Delta BQP}}{S_{\Delta BAC}}=\frac{1}{6}.\frac{1}{4}=\frac{1}{24}\Rightarrow S_{\Delta BQP}=\frac{1}{24}S_{\Delta BAC}$

$\Rightarrow\frac{S_{\Delta B'MN}}{S_{\Delta B'A'C'}}=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}=\frac{3}{8}\Rightarrow S_{\Delta B'MN}=\frac{3}{8}S_{\Delta BAC}$

Suy ra: $V_2=\frac{h}{3}\left(S_{\Delta BQP}+S_{\Delta B'MN}+\sqrt{S_{\Delta BQP}.S_{\Delta B'MN}}\right)$

$=\frac{h}{3}\left(\frac{1}{24}S_{\Delta BAC}+\frac{3}{8}S_{\Delta BAC}+\sqrt{\frac{1}{24}S_{\Delta BAC}.\frac{3}{8}S_{\Delta BAC}}\right)=\frac{h.S_{\Delta BAC}}{3}\left(\frac{1}{24}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{13V}{72}=13.$

Vậy: $V_1=V-V_2=72-13=59.$.

DẠNG 2 Thể tích khối lăng trụ đứng

❖ **Thể tích của khối lăng trụ đứng có diện tích đáy** S **, chiều cao (độ dài cạnh bên)** h **là** $V = S.h$

- Khối lăng trụ đứng là khối lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy .
- Chiều cao của khối lăng trụ đứng bằng độ dài cạnh bên của khối lăng trụ.
- Khối lăng trụ đa giác đều là khối lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều (khối lăng trụ tam giác đều, khối lăng trụ lục giác đều…)

❖ **Khai thác các giả thiết góc và khoảng cách cho khối lăng trụ đứng tam giác.**

- Kẻ $AH \perp BC\left(H \in BC\right), AK \perp A'H\left(K \in A'H\right)$ ta có $A'HA = \alpha = \left(\left(A'BC\right),\left(ABC\right)\right)$ và $h = AH.\tan\alpha$.
- $\begin{cases} AK \perp A'H \\ AK \perp BC \end{cases} \Rightarrow AK \perp \left(A'BC\right)$ và $AK = d_A = d\left(A,\left(A'BC\right)\right)$ có $\dfrac{1}{d_A^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{AH^2}$

❖ **Thể tích của một khối lập phương cạnh** a **là** $V = a^3$ **.**

Với hình lập phương cạnh a ta chú ý:

- Diện tích mỗi mặt của hình lập phương là $S = a^2$.
- Diện tích toàn phần (tổng diện tích các mặt) của hình lập phương là $S_{TP} = 6a^2$.
- Độ dài đường chéo của hình lập phương là $d = a\sqrt{3}$.
- Độ dài đường chéo mỗi mặt của hình lập phương là $a\sqrt{2}$.
- $d\left(A,\left(A'BD\right)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, \quad d\left(A,\left(CB'D'\right)\right) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
- $d\left(AC',CD\right) = d\left(AC',A'B'\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

❖ **Thể tích của một khối hộp chữ nhật kích thước** a,b,c **là** $V = a.b.c$ **.**

- Diện tích toàn phần (tổng diện tích các mặt) của hình hộp chữ nhật là $S_{TP} = 2\left(ab + bc + ca\right)$.
- Độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật là $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ hay $AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2}$.
- Kẻ $DH \perp AD'\left(H \in AD'\right)$, ta có $DHC = \alpha = \left(\left(ACD'\right),\left(ADD'A'\right)\right)$.
- Vì $AB \perp \left(BCC'B'\right)$ nên $AC'B = \left(AC',\left(BCC'B'\right)\right)$.
- $\dfrac{1}{d^2_{\left(A,\left(A'BD\right)\right)}} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AA'^2}$

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và $C'D'$ bằng a. Tính thể tích V của khối lập phương đã cho.

A. $V=8a^3$. **B.** $V=2\sqrt{2}a^3$. **C.** $V=3\sqrt{3}a^3$. **D.** $V=27a^3$.

Câu 2: Một khối hộp chữ nhật có diện tích các mặt xuất phát từ cùng một đỉnh lần lượt là $10\left(cm^2\right)$, $20\left(cm^2\right)$, $80\left(cm^2\right)$. Thể tích V của khối hộp chữ nhật đó.

A. $V=40\left(cm^3\right)$. **B.** $V=80\left(cm^3\right)$. **C.** $V=80\sqrt{10}\left(cm^3\right)$. **D.** $V=40\sqrt{10}\left(cm^3\right)$.

Câu 3: Khi tăng độ dài mỗi cạnh của một khối hộp chữ nhật lên 2 lần thì thể tích của nó tăng lên bao nhiêu lần?.

A. 7 lần. **B.** 2 lần. **C.** 4 lần. **D.** 8 lần.

Câu 4: Cho lăng trụ tam đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, $BAC=120°$, mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{3a^3}{8}$. **B.** $V=\dfrac{9a^3}{8}$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{8}$. **D.** $V=\dfrac{3a^3}{4}$.

Câu 5: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho

A. $V=\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{6}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{3}$.

Câu 6: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=a\sqrt{3}$ và mặt phẳng $(A'D'CB)$ tạo với đáy một góc 60^0. Thể tích V của khối hộp chữ nhật là

A. $V=a^3$. **B.** $V=3a^3$. **C.** $V=\sqrt{3}a^3$. **D.** $V=9a^3$.

Câu 7: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=AD=a$ và $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc 30^0. Thể tích V của khối hộp chữ nhật là

A. $V=3\sqrt{2}a^3$. **B.** $V=2a^3$. **C.** $V=\sqrt{2}a^3$. **D.** $V=\sqrt{6}a^3$.

Câu 8: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, $AC=2a$ và góc giữa CB' và $\left(ABC\right)$ bằng $60°$. Mặt phẳng $\left(P\right)$ qua trọng tâm tứ diện $CA'B'C'$, song song với mặt đáy lăng trụ và cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại E, F, Q. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $CEFQ$ và khối lăng trụ đã cho gần số nào sau đây nhất?

A. $0,06$. **B.** $0,25$. **C.** $0,09$. **D.** $0,07$.

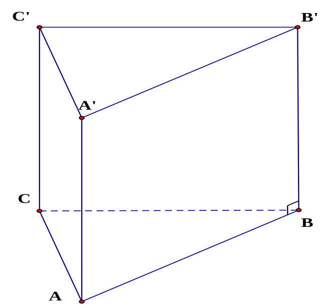
Câu 9: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là một hình thoi. Biết diện tích của hai mặt chéo $ACC'A', BDD'B'$ lần lượt là S_1, S_2 và góc $BA'D=90°$. Tính thể tích V của khối hộp đã cho.

A. $V=\dfrac{S_1S_2}{\sqrt[4]{4\left(S_2^2-S_1^2\right)}}$. **B.** $V=\dfrac{S_1S_2}{\sqrt[4]{2\left(S_1^2-S_2^2\right)}}$. **C.** $V=\dfrac{S_1S_2}{\sqrt[4]{2\left(S_2^2-S_1^2\right)}}$. **D.** $V=\dfrac{S_1S_2}{\sqrt[4]{4\left(S_1^2-S_2^2\right)}}$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, các tam giác SAB và SAD là những tam giác vuông tại A. Mặt phẳng $\left(P\right)$ qua A vuông góc với cạnh bên SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Biết $SC = 8a$, $ASC = 60^0$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp đa diện $ABCDMNP$?

A. $V = 6\pi a^3$. **B.** $V = 24\pi a^3$. **C.** $V = 32\sqrt{3}\pi a^3$. **D.** $V = 18\sqrt{3}\pi a^3$.

Câu 11: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ *(tham khảo hình vẽ bên dưới)*.Thể tích khối lăng trụ bằng



A. $\frac{9\sqrt{15}a^3}{20}$. **B** $\frac{3\sqrt{15}a^3}{20}$.

C. $\frac{3\sqrt{15}a^3}{10}$. **D.** $\frac{9\sqrt{15}a^3}{10}$.

Câu 12: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = 2a\sqrt{2}$. Biết khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{4a}{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = 4a^3$. **B.** $V = \frac{8a^3}{3}$. **C.** $V = 8a^3$. **D.** $V = \frac{4a^3}{3}$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC). Tìm $\cos\alpha$ khi thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ nhỏ nhất.

A. $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 14: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$

Câu 15: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$, $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan\alpha = \frac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng?

A. $V = 6$. **B.** $V = 8$. **C.** $V = 12$. **D.** $V = 10$.

Câu 16: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành. Gọi *H* là điểm trên cạnh *SD* sao cho $5SH = 3SD$, mặt phẳng (α) qua *B*, *H* và song song với đường thẳng *AC* cắt hai cạnh *SA*, *SC* lần lượt tại *E*, *F*. Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{C.BEHF}}{V_{S.ABCD}}$.

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{3}{20}$. **C.** $\frac{6}{35}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 17: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với đáy và $B'BC = 30°$. Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 18: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. cạnh $BC = 2a$ và $ABC = 60°$. Biết tứ giác $BCC'B'$ là hình thoi có $B'BC$ nhọn. Biết $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC) và $(ABB'A')$ tạo với (ABC) góc $45°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3}{3\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{a^3}{\sqrt{7}}$. **C.** $\frac{3a^3}{\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{6a^3}{\sqrt{7}}$.

Câu 19: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $ABC = 30°$. Điểm M là trung điểm cạnh AB, tam giác $MA'C$ đều cạnh $2a\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{72\sqrt{2}a^3}{7}$. **B.** $\frac{24\sqrt{3}a^3}{7}$. **C.** $\frac{72\sqrt{3}a^3}{7}$. **D.** $\frac{24\sqrt{2}a^3}{7}$.

Câu 20: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi I là giao điểm của AB' và $A'B$. Biết khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = 3a^3$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \frac{3a^3}{4}$. **D.** $V = \frac{a^3}{4}$.

Câu 21: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P. Tính thể tích của khối đa diện $MBP.A'B'N$

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{96}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{32}$.

Câu 22: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P. Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ bằng.

A. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{68}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{32}$. **C.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{96}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}a^3}{32}$.

Câu 23: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Các cạnh bên tạo với đáy một góc $60°$. Đỉnh A' cách đều các đỉnh A,B,C,D. Trong các số dưới đây, số nào ghi giá trị thể tích của hình lăng trụ nói trên?

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 24: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm cạnh BC. Góc giữa BB' và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 25: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABA') và (ABC) bằng $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $A.BCC'B'$.

A. $\frac{3}{2}a^3$. **B.** $V = a^3$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 26: Khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 3 và góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích V khối lăng trụ đã cho?

A. $V = 24\sqrt{3}$. **B.** $V = 8\sqrt{3}$. **C.** $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \frac{8\sqrt{3}}{9}$.

Câu 27: Khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 3 và góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích V khối lăng trụ đã cho?

A. $V = 24\sqrt{3}$. **B.** $V = 8\sqrt{3}$. **C.** $V = 72$. **D.** $V = 24$.

Câu 28: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 29: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a; AD = a\sqrt{3}$, góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và mặt phẳng (ACD') bằng 60^0. Tính thể tích khối hộp chữ nhật đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $V = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 30: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 31: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác đều cạnh x. Hình chiếu của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm ΔABC, cạnh $AA'=2x$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là:

A. $\frac{x^3\sqrt{11}}{12}$. **B.** $\frac{x^3\sqrt{39}}{8}$. **C.** $\frac{x^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{x^3\sqrt{11}}{4}$.

Câu 32: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=\sqrt{3}, AD=\sqrt{7}$ và cạnh bên bằng 1. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy các góc $45°$ và $60°$. Thể tích khối hộp bằng

A. $3\sqrt{3}$ **B.** $7\sqrt{7}$ **C.** 7 **D.** 3

Câu 33: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=\sqrt{3}, AD=\sqrt{7}$ và cạnh bên bằng 1. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy các góc $45°$ và $60°$. Thể tích khối hộp bằng

A. $3\sqrt{3}$ **B.** $7\sqrt{7}$ **C.** 7 **D.** 3

Câu 34: Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCA'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 35: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $m\in[-5;2)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $3a$, hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Cạnh AA' hợp với mặt phẳng đáy một góc $45°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tính theo a bằng.

A. $\frac{9a^3}{4}$. **B.** $\frac{27a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{4}$. **D.** $\frac{27a^3}{6}$.

Câu 37: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'}=\frac{1}{2}, \frac{BN}{BB'}=\frac{2}{3}$ và mặt phẳng (MNP) chia lăng trụ thành hai phần có thể tích bằng nhau. Khi đó tỉ số $\frac{CP}{CC'}$ là

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{5}{12}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 38: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 39: Cho hình lăng trụ C có đáy là tam giác đều cạnh H. Hình chiếu vuông góc của điểm D lên mặt phẳng M trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 40: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABCA_1B_1C_1$, góc giữa mặt phẳng (A_1BC) và đáy bằng $30°$, diện tích tam giác A_1BC bằng 8. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=27\sqrt{3}$. **B.** $V=24\sqrt{3}$. **C.** $V=9\sqrt{3}$. **D.** $V=8\sqrt{3}$.

Câu 41: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=a\sqrt{3}$, khoảng cách từ A đến $(A'BD)$ bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích V của khối hộp chữ nhật đã cho.

A. $V=\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $V=3a^3$. **C.** $V=2\sqrt{3}a^3$. **D.** $V=a^3$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V, đáy là hình chữ nhật, mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N, P, Q lên mặt đáy. Thể tích khối hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$ có giá trị lớn nhất là

A. $\frac{4}{27}V$. **B.** $\frac{2}{9}V$. **C.** $\frac{4}{9}V$. **D.** $\frac{2}{27}V$.

Câu 43: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là một hình thoi. Biết diện tích của hai mặt chéo $ACC'A'$, $BDD'B'$ lần lượt là 1 và $\sqrt{5}$ và $BA'D=90°$. Tính thể tích V của khối hộp đã cho.

A. $V=\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{10}}{2}$. **C.** $V=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $V=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

Câu 44: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ với đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC=2a$, $BAD=120^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là trung điểm cạnh $A'B'$, góc giữa mặt phẳng $(AC'D')$ và mặt đáy lăng trụ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V=\sqrt{3}a^3$. **B.** $V=6\sqrt{3}a^3$. **C.** $V=2\sqrt{3}a^3$. **D.** $V=3\sqrt{3}a^3$.

Câu 45: Cho khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, $A'D$ bằng 2 và độ dài đường chéo của mặt bên bằng 5. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho, biết độ dài cạnh đáy nhỏ hơn độ dài cạnh bên.

A. $V=\frac{10\sqrt{5}}{3}$. **B.** $20\sqrt{5}$. **C.** $V=\frac{20\sqrt{5}}{3}$. **D.** $V=10\sqrt{5}$.

Câu 46: Cho khối lập phương (H) có cạnh bằng 1. Qua mỗi cạnh của (H) dựng một mặt phẳng không chứa các điểm trong của (H) và tạo với hai mặt của (H) đi qua cạnh đó những góc bằng nhau. Các mặt phẳng như thế giới hạn một đa diện (H'). Tính thể tích của (H').

A. 4. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 47: Một khối hộp chữ nhật có các kích thước thỏa mãn $a, b, c \in [1;4]$ và $a+b+c=6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích toàn phần của khối hộp chữ nhật đó.

A. 18. **B.** 24. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 48: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân ABC với $AB = AC = a$, góc $BAC = 120°$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $30°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{9a^3}{8}$. **B.** $V = \frac{a^3}{6}$. **C.** $V = \frac{a^3}{8}$. **D.** $V = \frac{3a^3}{8}$.

Câu 49: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng 1 và $\cos in$ góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(ACC'A')$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 50: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A. Khoảng cách từ A' đến các đường thẳng AB', AC' và mặt phẳng $(AB'C')$ lần lượt bằng 1; $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{6\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{3\sqrt{15}}{5}$.

Câu 51: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A. Khoảng cách từ A' đến các đường thẳng $AB', AC', B'C'$ lần lượt bằng $1; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

A. $\frac{6\sqrt{210}}{35}$. **B.** $\frac{\sqrt{210}}{35}$. **C.** $\frac{2\sqrt{210}}{35}$. **D.** $\frac{3\sqrt{210}}{35}$.

Câu 52: Trong các khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích tam giác $A'BC$ là 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC),(ABC)$. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối lăng trụ đạt lớn nhất.

A. $\tan\alpha = 2$. **B.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **D.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 53: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A, mặt bên là hình vuông $BCC'B'$, khoảng cách giữa AB' và CC' bằng a. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $V = \sqrt{2}a^3$. **C.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **D.** $V = a^3$.

Câu 54: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi I là giao điểm của AB' và $A'B$ Cho biết khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

A. $V = 3a^3$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{4}$.

Câu 55: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình bình hành. Các đường chéo DB' và AC' lần lượt tạo với đáy góc 45^0 và 30^0. Biết $BAD = 60^0$, chiều cao hình lăng trụ bằng a. Tính thể tích V khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V = a^3\sqrt{3}$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{2}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 56: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, E là trung điểm của $B'C'$, CB' cắt BE tại M. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCM$, biết $AB = 3a$ và $AA' = 6a$

A. $V = 8a^3$. **B.** $V = 6\sqrt{2}a^3$. **C.** $V = 6a^3$. **D.** $V = 7a^3$.

Câu 57: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông ABC vuông tại A, $AC = a$, $ACB = 60°$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $\left(A'C'CA\right)$ góc $30°$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $a^3\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $2\sqrt{3}a^3$.

Câu 58: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, với $AB = AC = a$ và góc $BAC = 120°$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $\left(ABC\right)$ và $\left(AB'I\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{33}}{11}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$.

Câu 59: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB', CC' lần lượt bằng 1 và 2; khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 4. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 60: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{5}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Câu 61: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB', CC' lần lượt là 1 và $\sqrt{3}$, khoảng cách từ C đến BB' bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $\left(A'B'C'\right)$ là trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ và $A'G' = \dfrac{4}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. 2 . **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 4 . **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 62: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; góc giữa AA' với $(ABCD)$ bằng $45°$. Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB', DD' cùng bằng 1 . Góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(C'CDD')$ bằng $60°$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng:

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 2 . **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 63: Cho khối đa diện $ABC.A'B'C'$ có $AA'//BB'//CC'$ .Biết khoảng cách từ A đến BB' bằng 1, khoảng cách từ A đến CC' bằng $\sqrt{3}$; Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB', CC' bằng 2 và $AA'=1, BB'=2, CC'=3$ .Thể tích khối đa diện $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 64: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ .Biết khoảng cách từ A đến BB' bằng 1, khoảng cách từ A đến CC' bằng $\sqrt{3}$; góc giữa hai mặt bên của lăng trụ chung cạnh AA' bằng 90^o . Hình chiếu của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của cạnh $B'C'$ và $A'M=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .Thể tích khối đa diện $ABC.A'B'C'$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

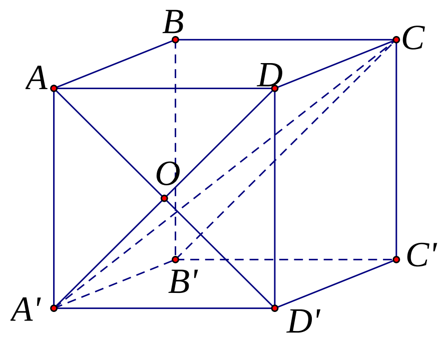
--------------------------------HẾT------------------------------

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	**2.D**	**3.D**	**4.A**	**5.A**	**6.B**	**7.C**	**8.B**	**9.A**	**10.C**
11.A	**12.C**	**13.B**	**14.B**	**15.B**	**16.B**	**17.D**	**18.C**	**19.A**	**20.A**
21.C	**22.C**	**23.C**	**24.D**	**25.B**	**26.A**	**27.C**	**28.A**	**29.D**	**30.B**
31.A	**32.D**	**33.D**	**34.C**	**35.B**	**36.B**	**37.C**	**38.D**	**39.A**	**40.D**
41.B	**42.C**	**43.A**	**44.B**	**45.D**	**46.B**	**47.A**	**48.C**	**49.A**	**50.D**
51.D	**52.C**	**53.C**	**54.A**	**55.D**	**56.C**	**57.A**	**58.C**	**59.A**	**60.D**
61.D	**62.C**	**63.D**	**64.A**						

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B



Đặt cạnh hình lập phương là x.

Gọi $O = AD' \cap A'D$, ta có $D'O \perp (DCB'A')$.

Ta có: $A'C \subset (DCB'A') // C'D'$ nên

$d(C'D'; A'C) = d(C'D'; (DCB'A'))$

$= d(D'; (DCB'A')) = D'O = \dfrac{x\sqrt{2}}{2} = a$.

Do đó, $x = a\sqrt{2}$. Thể tích khối lập phương là: $V = x^3 = 2\sqrt{2}a^3$.

Câu 2: Chọn D

Đặt độ dài các cạnh của hình hộp chữ nhật là a, b, c, ta có:

$\begin{cases} ab = 10 \\ bc = 20 \\ ca = 80 \end{cases} \Rightarrow abc = 40\sqrt{10}$. Thể tích của khối hộp chữ nhật là: $V = abc = 40\sqrt{10}\ (cm^3)$.

Câu 3: Chọn D

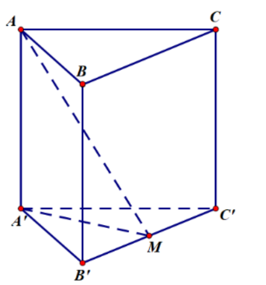
Giả sử độ dài mỗi cạnh của khối hộp là a, b, c, thể tích khối hộp là $V_1 = abc$.

Khi tăng độ dài mỗi cạnh lên 2 lần thì độ dài mỗi cạnh là $2a, 2b, 2c$ và có thể tích là

$$V_2 = 2a.2b.2c = 8abc = 8V_1$$

Do đó, thể tích khối hộp chữ nhật tăng lên 8 lần.

Câu 4: Chọn A



Gọi M là trung điểm $B'C'$. Ta có $\begin{cases} AM \perp B'C' \\ A'M \perp B'C' \end{cases}$

$\Rightarrow ((AB'C'), (A'B'C')) = A'MA = 60^\circ$

Tam giác $A'MB'$ vuông tại M, có $B'A'M = 60^\circ$ nên $A'M = a\cos 60^\circ = \dfrac{a}{2}$.

$AA' = A'M.\tan(AMA') = \dfrac{a}{2}.\tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

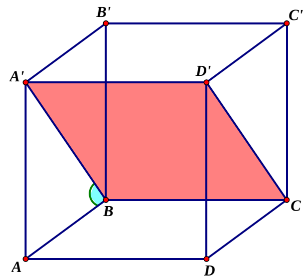
$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 60^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V = AA'.S_{ABC} = \dfrac{3a^3}{8}$.

Câu 5: **Chọn A**

Ta có $AB = BC = a$.

Thể tích lăng trụ đa cho là $V = S_{\Delta ABC}.BB' = \dfrac{1}{2}.a.a.a = \dfrac{a^3}{2}$.

Câu 6: **Chọn B**



Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ A'B \perp BC \end{cases} \Rightarrow \left(\left(A'D'BC\right),\left(ABCD\right)\right) = A'BA = 60°$

$AA' = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3} \Rightarrow V = AB.AAD.AA' = 3a^3$

Câu 7: **Chọn C**

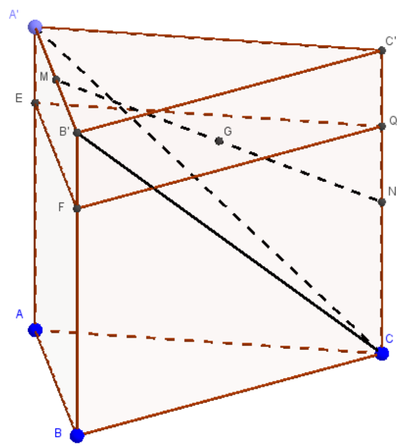
Dùng ảnh câu 6 nhé !

Ta có $\left(A'C,\left(ABB'A'\right)\right) = CA'B = 30°$

$BC = A'B.\tan 30^0 = \dfrac{\sqrt{a^2 + A'A^2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{a^2 + A'A^2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow A'A = \sqrt{2}a$

$V = AB.AAD.AA' = \sqrt{2}a^3$

Câu 8: **Chọn B**



Gọi M, N lần lượt là trung điểm $A'B'$, CC'; G là trung điểm MN. Suy ra G là trọng tâm tứ diện $CA'B'C'$.

(P) qua G và cắt các cạnh AA', BB', CC' lần lượt tại E, F Q thì $AE = BF = CQ = \dfrac{3}{4}AA'$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S_{ABC}$.

Thể tích tứ diện $CEFQ$ là:

$V_{CEFQ} = \dfrac{1}{3}CQ.S_{EFQ} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{4}AA'.S_{ABC} = \dfrac{1}{4}V \Rightarrow \dfrac{V_{CEFQ}}{V} = \dfrac{1}{4} = 0,25$.

Câu 9: **Chọn A**

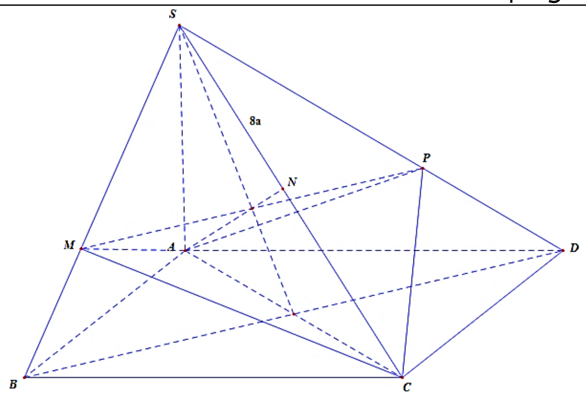
Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $S_1 = AC.AA'$; $S_2 = BD.AA'$ và $BA'D = 90^o \Rightarrow OA' = \dfrac{BD}{2}$

Tam giác $A'AO$ vuông tại A có $OA'^2 = AA'^2 + OA^2 = AA'^2 + \dfrac{AC^2}{4}$

Suy ra $\dfrac{BD^2}{4} = AA'^2 + \dfrac{AC^2}{4}$ hay $\dfrac{S_2^2}{4AA'^2} = AA'^2 + \dfrac{S_1^2}{4AA'^2} \Rightarrow AA' = \dfrac{\sqrt[4]{S_2^2 - S_1^2}}{4}$

Do đó $V = S_{ABCD} \cdot AA' = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD \cdot AA' = \dfrac{S_1S_2}{2AA'} = \dfrac{S_1S_2}{\sqrt[4]{4.\left(S_2^2 - S_1^2\right)}}$.

Câu 10: **Chọn C**



Mặt phẳng $(AMNP)\perp SC \Rightarrow ANC = 90^0\,(1), SC \perp AM$.

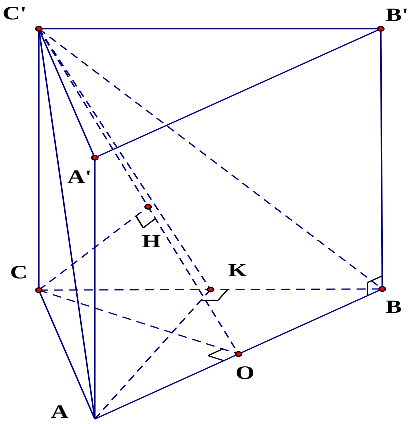
Do $(SAB)\perp BC \Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MC \Rightarrow AMC = 90^0\,(2)$

Tương tự ta có $APC = 90^0\,(3)$

Do $ABCD$ là hình vuông nên từ $(1),(2),(3)$ suy ra AC là đường kính mặt cầu ngoại tiếp đa diện $ABCDMNP$.

Xét tam giác SAC có $\sin 60^0 = \dfrac{AC}{SC} \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}a \Rightarrow R = 2\sqrt{3}a \Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi\left(2\sqrt{3}a\right)^3 = 32\sqrt{3}\pi a^3$.

Câu 11: Chọn A



Gọi $2x$ là cạnh của tam giác đều, Gọi O,K lần lượt là trung điểm của AB,BC

Kẻ $CK \perp C'O$

Ta có $CH \perp C'O$ và $CH \perp AB$ nên $CH \perp (ABC')$ và $d(C,(ABC')) = CH = a$

Suy ra: $\dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{CC'^2} + \dfrac{1}{CO^2}$ hay $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{CC'^2} + \dfrac{1}{3x^2}$ **(1)**

Ta có hình chiếu vuông góc của tam giác ABC' lên mặt phẳng $(BCC'B')$ là tam giác KBC'

Do đó $\dfrac{S_{\Delta KBC'}}{S_{\Delta ABC'}} = \cos\alpha = \dfrac{1}{3}$

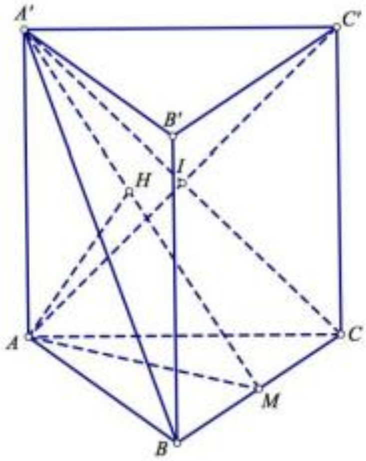
Ta có: $S_{\Delta KBC'} = \dfrac{1}{2}.x.CC'$ và $S_{\Delta ABC'} = \dfrac{1}{2}.AB.C'O = \dfrac{1}{2}.AB.\sqrt{CC'^2 + CO^2} = x\sqrt{CC'^2 + 3x^2}$

Do đó $\dfrac{1}{2}.x.CC' = \dfrac{1}{3}x\sqrt{CC'^2 + 3x^2} \Leftrightarrow 3CC' = 2\sqrt{CC'^2 + 3x^2} \Leftrightarrow 5CC'^2 = 12x^2$ **(2)**

Từ $(1),(2)$ ta có $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{CC'^2} + \dfrac{4}{5CC'^2} \Leftrightarrow 5CC'^2 = 9a^2 \Leftrightarrow CC' = \dfrac{3a}{\sqrt{5}}$

Suy ra $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC}.CC' = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}.\dfrac{3a}{\sqrt{5}} = \dfrac{9\sqrt{15}a^3}{20}$.

Câu 12: Chọn C



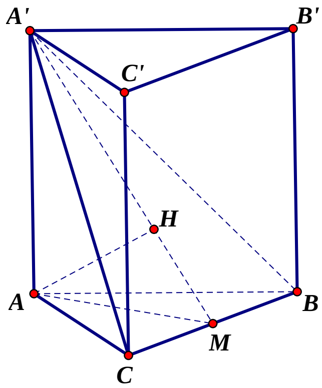
Gọi M là trung điểm cạnh BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên $A'M$ ta có $\mathrm{d}\left(C';\left(A'BC\right)\right)=\mathrm{d}\left(A;\left(A'BC\right)\right)=AH$.

Mà $$AH=\frac{AA'\cdot AM}{\sqrt{A'A^2+AM^2}}=\frac{4a}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AA'\cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{A'A^2+2a^2}}=\frac{4a}{3}\Leftrightarrow AA'=4a.$$

$$V=AA'\cdot\frac{1}{2}AB\cdot AC=4a\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a=8a^3.$$

Câu 13: Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC, kẻ $AH\perp A'M\Rightarrow AH\perp\left(A'BC\right)$ $\Rightarrow AH=d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=a$ và góc giữa $\left(A'BC\right)$ với $\left(ABC\right)$ là $\widehat{A'MA}=\alpha$.

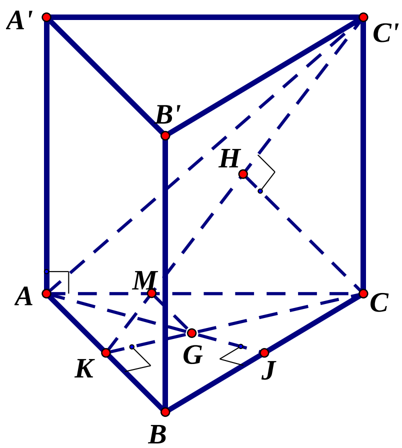
Ta có $\begin{cases} AM=\dfrac{AH}{\sin\alpha}=\dfrac{3}{\sin\alpha}, BC=2AM=\dfrac{6}{\sin\alpha}, \\ AA'=AM\tan\alpha=\dfrac{3}{\cos\alpha}\end{cases}$.

Khi đó $V=S.h=\dfrac{1}{2}AM.BC.AA'=\dfrac{27}{\sin^2\alpha.\cos\alpha}=\dfrac{27}{\left(1-\cos^2\alpha\right).\cos\alpha}$

$$=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{2\cos^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)\left(1-\cos^2\alpha\right)}}\ge\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{2\cos^2\alpha+1-\cos^2\alpha+1-\cos^2\alpha}{3}\right)^3}}=\frac{81\sqrt{3}}{2}.$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 14: Chọn B



Gọi K,J lần lượt là trung điểm của AB, BC.

Gọi x là độ dài cạnh AB.

$AJ=CK=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $CH\perp\left(ABC'\right)\Rightarrow d\left(C,\left(ABC'\right)\right)=CH=a$.

Mặt khác $AJ\perp\left(BCC'B'\right)$.

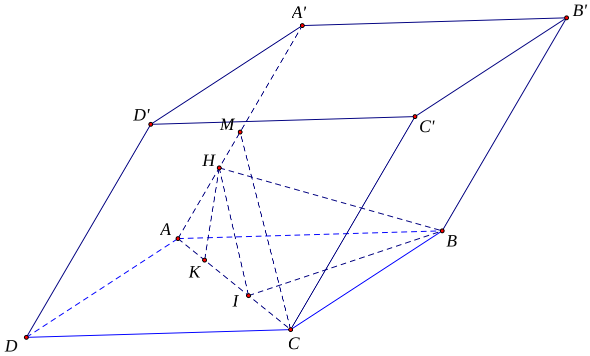
Nên $\left(\left(ABC'\right),\left(BCC'B'\right)\right)=\left(CH,AJ\right)=\alpha=\left(CH,AG\right)$ $(\cos\alpha=\sin\varphi)$.

Ta có $\sin\varphi=\dfrac{MG}{AG}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\Leftrightarrow MG=\dfrac{AG}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}\dfrac{AJ}{\sqrt{3}.2}=\dfrac{x\sqrt{3}}{2.3\sqrt{3}}=\dfrac{x}{6}$.

$\dfrac{HC}{3}=\dfrac{x}{6}\Leftrightarrow\dfrac{a}{3}=\dfrac{x}{6}\Leftrightarrow x=2a$ mà $d\left(C,\left(ABC'\right)\right)=CH=a$.

$$\Rightarrow CC'=\frac{CH.CK}{\sqrt{CK^2-CH^2}}=\frac{a\frac{2a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2-a^2}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.\ \text{Vậy } V=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}.CC'=\frac{\left(2a\right)^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 15: Chọn B



Từ B **kẻ** $BI\perp AC\Rightarrow BI\perp\left(AA'C'C\right)$.

Từ I **kẻ** $IH\perp AA'$

$\Rightarrow\left(\left(AA'C'C\right),\left(AA'B'B\right)\right)=BHI$.

Theo giải thiết ta có $AC=3$

$\Rightarrow BI=\frac{AB.BC}{AC}=\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông BIH **có** $\tan BHI=\frac{BI}{IH}$

$\Leftrightarrow IH=\frac{BI}{\tan BHI}\Leftrightarrow IH=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Xét tam giác vuông ABC **có** $AI.AC=AB^2\Rightarrow AI=\frac{AB^2}{AC}=2$.

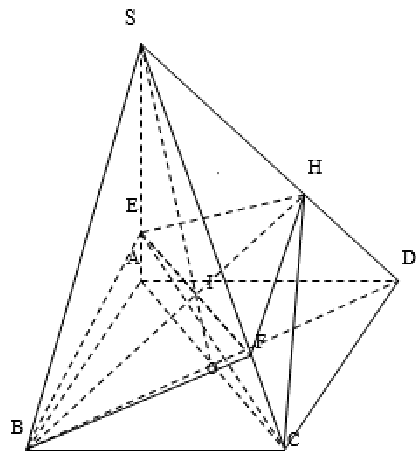
Gọi M **là trung điểm cả** AA'**, do tam giác** $AA'C$ **cân tại** C **nên** $CM\perp AA'\Rightarrow CM\ //\ IH$.

Do $\frac{AI}{AC}=\frac{AH}{AM}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{AH}{AM}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{AH}{AA'}=\frac{1}{3}$.

Trong tam giác vuông AHI **kẻ đường cao** HK **ta có** $HK=\frac{4\sqrt{2}}{9}\Rightarrow$ **chiều cao của lăng trụ** $ABCD.A'B'C'D'$ là $h=3HK=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCD.A'B'C'D'}=AB.AD.h=\sqrt{6}\sqrt{3}\frac{4\sqrt{2}}{3}=8$.

Câu 16: Chọn B



Đặt $V_{S.ABCD}=V$

Trong tam giác SOD ta có:

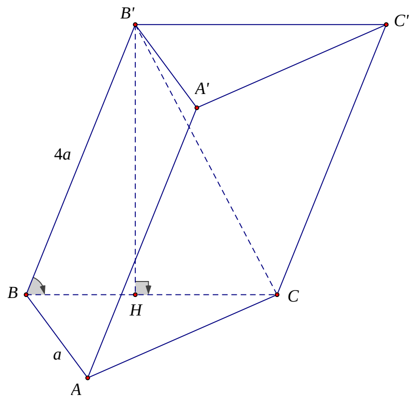
$\frac{IS}{IO}.\frac{BO}{BD}.\frac{HD}{HS}=1\Rightarrow\frac{IS}{IO}=3\Rightarrow\frac{SI}{SO}=\frac{SE}{SA}=\frac{SF}{SC}=\frac{3}{4}$.

Ta có: $\frac{V_{S.HBC}}{V_{S.DBC}}=\frac{SH}{SD}=\frac{3}{5}\Rightarrow V_{S.HBC}=\frac{3V}{10}$.

Mặt khác: $\frac{V_{C.FHB}}{V_{C.SHB}}=\frac{CF}{CS}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{C.FHB}=\frac{3V}{40}$.

Mà: $V_{C.BEHF}=2V_{C.FHB}=\frac{6V}{40}\Rightarrow\frac{V_{C.BEHF}}{V_{S.ABCD}}=\frac{3}{20}$.

Câu 17: Chọn D



Gọi H là hình chiếu của B' trên BC. Từ giả thiết suy ra: $B'H \perp (ABC)$.

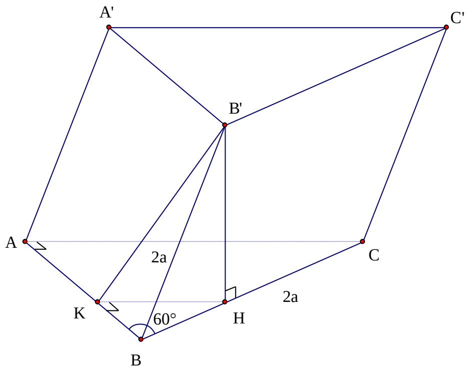
$S_{BB'C} = \dfrac{1}{2}BB'.BC.\sin B'BC = \dfrac{1}{2}4a.a.\sin 30^\circ = a^2$.

Mặt khác: $S_{BB'C} = \dfrac{1}{2}B'H.BC \Rightarrow B'H = \dfrac{2S_{BB'C}}{BC} = \dfrac{2a^2}{a} = 2a$.

$V_{LT} = B'H.S_{ABC} = 2a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

$V_{A.CC'B'} = \dfrac{1}{2}V_{A.CC'B'B} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}V_{LT} = \dfrac{1}{3}V_{LT} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 18: Chọn C



Do ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $BC = 2a$ và $ABC = 60°$ nên $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B' lên BC

$\Rightarrow H$ thuộc đoạn BC (do $B'BC$ nhọn)

$\Rightarrow B'H \perp (ABC)$ (do $(BCC'B')$ vuông góc với (ABC)).

Kẻ HK song song AC $(K \in AB)$ $\Rightarrow HK \perp AB$ (do ABC là tam giác vuông tại A).

$\Rightarrow \left[(ABB'A'),(ABC)\right] = B'KH = 45^\circ \Rightarrow B'H = KH$ (1)

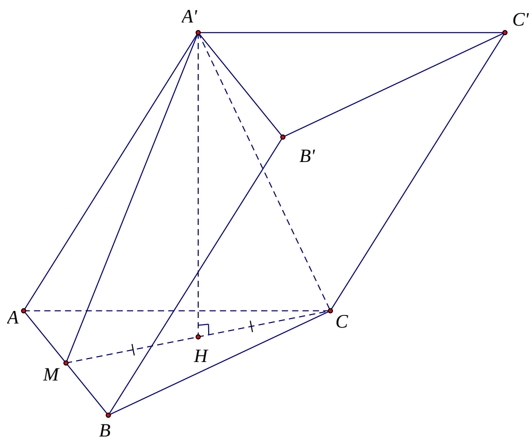
Ta có $\Delta BB'H$ vuông tại $H \Rightarrow BH = \sqrt{4a^2 - B'H^2}$ (2)

Mặt khác HK song song $AC \Rightarrow \dfrac{BH}{BC} = \dfrac{HK}{AC} \Rightarrow BH = \dfrac{HK.2a}{a\sqrt{3}}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\sqrt{4a^2 - B'H^2} = \dfrac{B'H.2a}{a\sqrt{3}} \Rightarrow B'H = a\sqrt{\dfrac{12}{7}}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.B'H = \dfrac{1}{2}AB.AC.B'H = \dfrac{3a^3}{\sqrt{7}}$.

Câu 19: Chọn A



Gọi H là trung điểm của MC.

Ta có $\begin{cases} A'H \perp MC \\ (A'MC) \perp (ABC) \\ (A'MC) \cap (ABC) = MC \end{cases} \Rightarrow A'H \perp (ABC)$

Tam giác $MA'C$ đều cạnh $2a\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} MC = 2a\sqrt{3} \\ A'H = 3a \end{cases}$

Đặt $AC = x > 0$, tam giác ABC vuông tại A có $ABC = 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} BC = 2x \\ AB = x\sqrt{3} \end{cases}$

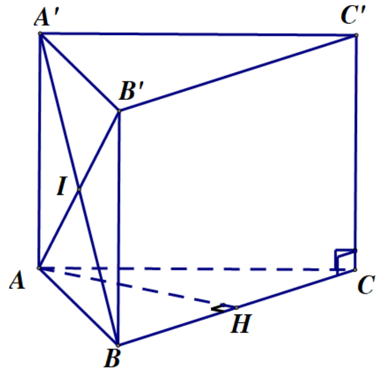
Áp dụng công thức tính độ dài trung tuyến ta có

$$CM^2 = \frac{CA^2 + CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow 12a^2 = \frac{x^2 + 4x^2}{2} - \frac{3x^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{4a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.\frac{12a}{\sqrt{7}}.\frac{4a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{24a^2\sqrt{3}}{7}$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = \frac{72a^3\sqrt{3}}{7}$.

Câu 20: Chọn A



$ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ đều nên ΔABC là tam giác đều và $AA' = a\sqrt{3}$ là chiều cao của khối này.

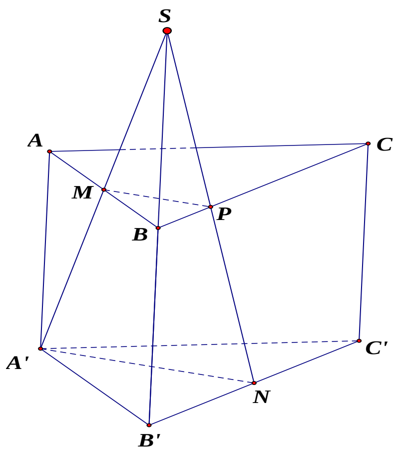
$$\frac{d(A;(BCC'B'))}{d(I;(BCC'B'))} = \frac{AB'}{IB'} = 2 \Rightarrow d(A;(BCC'B')) = 2d(I;(BCC'B')) = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Gọi H là hình chiếu của A trên BC thì do ΔABC đều và $(ABC) \perp (BCC'B')$ nên H cũng là hình chiếu của A trên $(BCC'B')$ và H là trung điểm của BC.

$$AH = d(A;(BCC'B')) = a\sqrt{3} \Rightarrow BC = \frac{2AH}{\sqrt{3}} = 2a \Rightarrow S_{ABC} = a^2\sqrt{3}.$$

Vậy thể tích của khối lăng trụ đều đã cho là $V = S_{ABC}.AA' = a^2\sqrt{3}.a\sqrt{3} = 3a^3$.

Câu 21: Chọn C



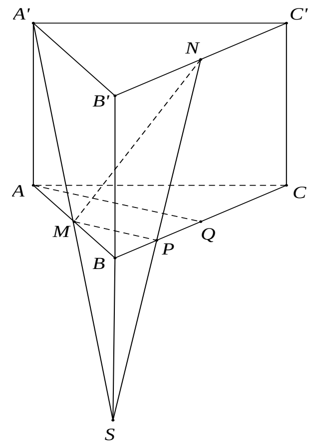
Gọi S là giao điểm của $A'M$ và BB', khi đó P là giao điểm SN và BC.

Ta có $\frac{V_{SMBP}}{V_{SA'B'N}} = \frac{SM}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SP}{SN} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{MBP.A'B'N} = \frac{7}{8}V_{SA'B'N} = \frac{7}{8}$.

$$V_{SA'B'N} = \frac{1}{3}SB'.S_{\Delta A'B'N} = \frac{1}{3}SB'.\frac{1}{2}A'B'.B'N\sin 60^\circ = \frac{1}{6}2a.a.\frac{a}{2}\sin 60^\circ = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

$$\Rightarrow V_{MBP.A'B'N} = \frac{7}{8}V_{SA'B'N} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{96}.$$

Câu 22: Chọn C



Gọi Q là trung điểm của BC. Suy ra $AQ \parallel A'N \Rightarrow MP \parallel AQ \Rightarrow P$ là trung điểm của BQ.

Ta có $BB', A'M, NP$ đồng quy tại S và B là trung điểm của $B'S$ $\Rightarrow SB' = 2a$.

$$S_{A'B'N} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \Rightarrow V_{S.A'B'N} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

$$V_{SMNP} = \frac{1}{8}V_{SA'B'N} \Rightarrow V_{MBPA'B'N} = \frac{7}{8}V_{SA'B'N} = \frac{7\sqrt{3}a^3}{96}.$$

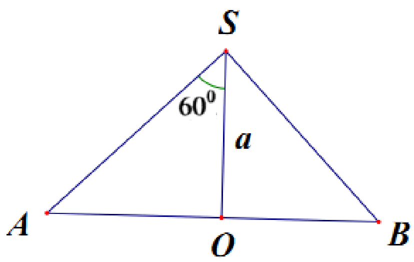
Câu 23: Chọn C

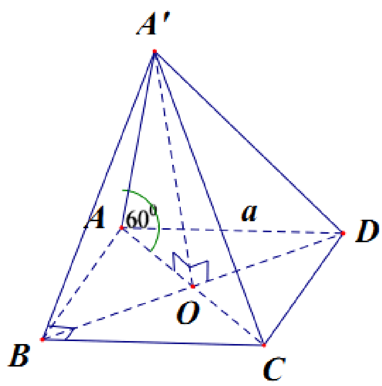
Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Từ giả thiết A' cách đều các đỉnh A, B, C ta suy ra hình chiếu của A' trên mặt phẳng $ABCD$ là O hay $A'O$ là đường cao của khối lăng trụ.

Trong tam giác $A'OA$ vuông tại A và $A'OA = 60^\circ$, ta có:

$A'O = OA.\tan 60^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ACDD} = a^2$.

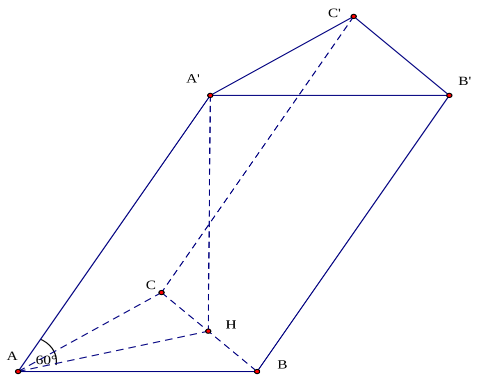
Thể tích của khối lăng trụ là $V = B.h = S_{ABCD}.A'O = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. Vậy $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.





.

Câu 24: Chọn D



Gọi H là trung điểm cạnh BC. Theo đề ra: $A'H \perp (ABC)$.

$$AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\ S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\ (đvdt)$$

.

Ta có:

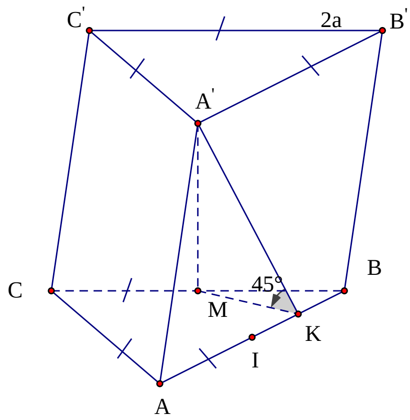
$$\begin{cases} (AA',(ABC)) = A'AH \\ (AA',(ABC)) = (BB',(ABC)) = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow A'AH = 60^\circ$$

.

Xét $\Delta A'AH$ vuông tại H: $A'H = AH.\tan 60^\circ = \frac{3}{2}a$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}\ (đvtt)$

Câu 25: Chọn B



Ta có: $V_{ABC.A'B'C'} = V_{A.A'B'C'} + V_{A.BCC'B'} = V_{A'.ABC} + V_{A'.BCC'B'}$.

Mà $V_{A'.BCC'B'} = V_{A.BCC'B'} \Rightarrow V_{A.A'B'C'} = V_{A'.ABC}$.

Gọi M là trung điểm của BC, I là trung điểm của AB và K là trung điểm của IB. Khi đó: $A'M \perp (ABC)$.

Mặt khác: $\left.\begin{matrix} MK // CI \\ CI \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow MK \perp AB$.

$MK \perp AB$, $A'M \perp AB \Rightarrow A'K \perp AB$.

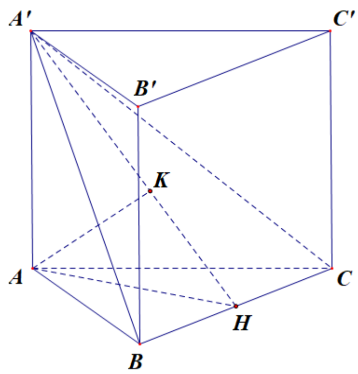
Góc giữa hai mặt phẳng (ABA') và (ABC) chính là góc giữa $A'K$ và KM và bằng $\widehat{A'KM} = 45°$ nên tam giác $A'KM$ vuông cân tại M.

Trong tam giác ABC: $MK = \frac{1}{2}CI = \frac{1}{2}.\frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông cân $A'KM$: $A'M = MK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}.V_{ABC.A'B'C'}$.

$\Rightarrow V_{A'.BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}.S_{\Delta ABC}.A'M = \frac{2}{3}.a^2\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a^3$.

Câu 26: Chọn A



Do lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đều nên lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng.

Gọi H là trung điểm của BC, K là hình chiếu của H lên $A'H$.

Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow (ABC) \perp (AA'H)$

Mà

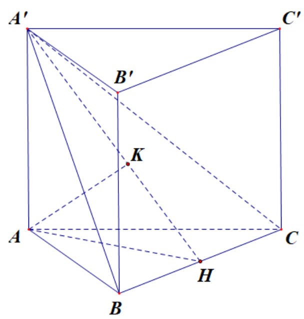
$AK \perp A'H \Rightarrow AK \perp (A'BC) \Rightarrow d(A,(A'BC)) = AK = 3$.

Ta có góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa AH và. Suy ra $\widehat{A'HA} = 60^0$.

Ta có $AH = \frac{AK}{\sin 60^0} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} A'A = AH.\tan 60^0 = 6 \\ AB = \frac{2.2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4 \end{cases}$

Thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC}.AA' = 4\sqrt{3}.6 = 24\sqrt{3}$.

Câu 27: Chọn C



Gọi H hình chiếu của A lên BC, K là hình chiếu của H lên $A'H$.

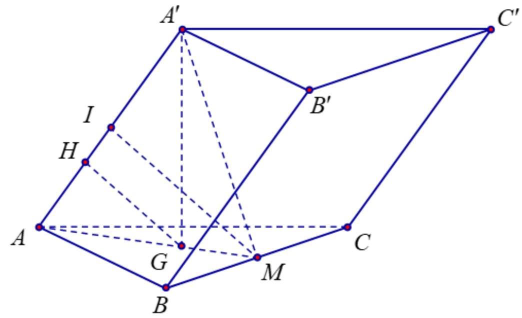
Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow (ABC) \perp (AA'H)$

Mà $AK \perp A'H \Rightarrow AK \perp (A'BC) \Rightarrow d(A,(A'BC)) = AK = 3$.

Ta có góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa AH và. Suy ra $A'HA = 60^0$. Ta có $AH = \dfrac{AK}{\sin 60^0} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} A'A = AH.\tan 60^0 = 6 \\ BC = 2AH = 4\sqrt{3};\ AB = 2\sqrt{6} \end{cases}$

Thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC}.AA' = \dfrac{1}{2}.\left(2\sqrt{6}\right)^2.6 = 72$.

Câu 28: Chọn A



Ta có $A'G \perp (ABC)$ nên $A'G \perp BC$; $BC \perp AM$

$\Rightarrow BC \perp (MAA')$

Kẻ $MI \perp AA'$;

$BC \perp IM$ nên $d(AA';\ BC) = IM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

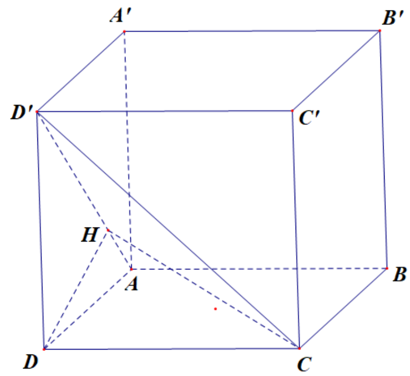
Kẻ $GH \perp AA'$,

Ta có $\dfrac{AG}{AM} = \dfrac{GH}{IM} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow GH = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$$\frac{1}{HG^2} = \frac{1}{A'G^2} + \frac{1}{AG^2} \Leftrightarrow A'G = \frac{AG.HG}{\sqrt{AG^2 - HG^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{12}}} = \frac{a}{3}$$

$V_{ABC.A'B'C'} = A'G.S_{ABC} = \dfrac{a}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

Câu 29: Chọn D



Gọi H là hình chiếu của D lên AD'.

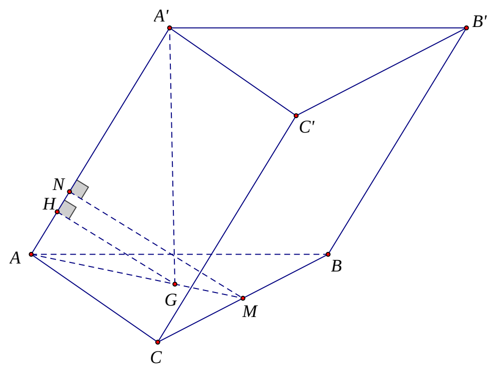
Ta có $AD' \perp (DHC) \Rightarrow \left((ADD'A'),(ACD')\right) = DHC = 60^0$.

Có $DH = CD.\cot 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,

Suy ra $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{DD'^2} + \dfrac{1}{DA^2} \Rightarrow DD' = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Thể tích khối hộp là $V = S_{ABCD}.DD' = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 30: Chọn B



Gọi G là trọng tâm của ΔABC, M là trung điểm của BC.

$\Rightarrow A'G \perp (ABC)$.

Trong $(AA'M)$ dựng $MN \perp AA'$, ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'G) \Rightarrow BC \perp MN$.

$\Rightarrow d(AA', BC) = MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi H là hình chiếu của G lên AA'.

Ta có: $GH//MN \Rightarrow \frac{GH}{MN} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow GH = \frac{2}{3}MN = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác $AA'G$ vuông tại G, ta có:

$$\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GA^2} + \frac{1}{GA'^2} \Rightarrow \frac{1}{GA'^2} = \frac{1}{GH^2} - \frac{1}{GA^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{27}{3a^2}. \Rightarrow GA' = \frac{a}{3}.$$

Vậy thể tích của khối lăng trụ là: $V = S_{ABC}.A'G = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

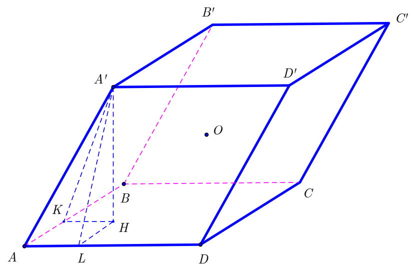
Câu 31: ChọnA

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC). Do ΔABC đều nên H là trọng tâm tam giác ΔABC. Ta có $AM = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AM = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác vuông $\Delta AA'H$, có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{x\sqrt{33}}{3}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}x^2.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{x\sqrt{33}}{3} = \frac{x^3\sqrt{11}}{4}$.

Câu 32: Chọn D



Gọi H là hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ và K, L là hình chiếu của H trên AB, AD.

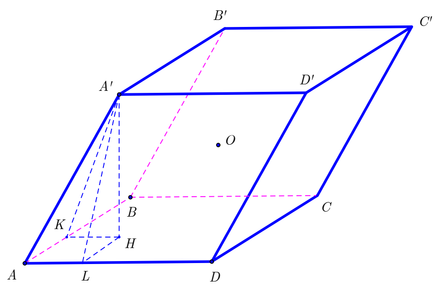
Ta có các góc $A'KH = 45°$ và $A'LH = 60°$.

Đặt $A'H = x$ suy ra $HK = x; HL = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $AA'^2 = AH^2 + A'H^2 = x^2 + \frac{x^2}{3} + x^2 \Rightarrow \frac{7x^2}{3} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

Thể tích khối hộp bằng $V = B.h = AB.AD.A'H = \sqrt{3}\sqrt{7}.\sqrt{\frac{3}{7}} = 3$.

Câu 33: Chọn D



Gọi H là hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ và K, L là hình chiếu của H trên AB, AD.

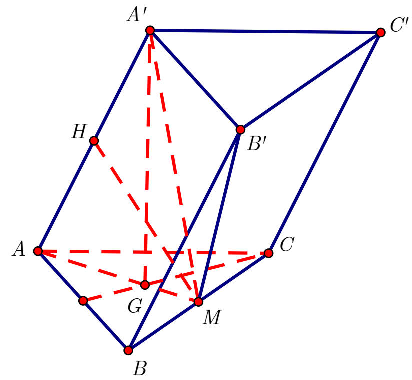
Ta có các góc $A'KH = 45°$ và $A'LH = 60°$.

Đặt $A'H = x$ suy ra $HK = x; HL = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $AA'^2 = AH^2 + A'H^2 = x^2 + \dfrac{x^2}{3} + x^2 \Rightarrow \dfrac{7x^2}{3} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

Thể tích khối hộp bằng $V = B.h = AB.AD.A'H = \sqrt{3}\sqrt{7}.\sqrt{\dfrac{3}{7}} = 3$.

Câu 34: Chọn C



M là trung điểm của BC thì $BC \perp (AA'M)$.

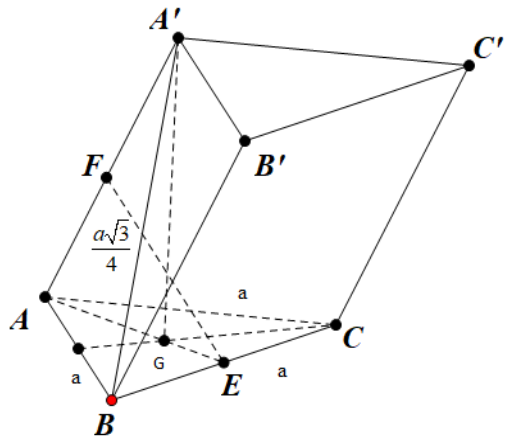
Gọi MH là đường cao của tam giác $A'AM$ thì $MH \perp A'A$ và $HM \perp BC$ nên HM là khoảng cách AA' và BC. Ta có

$$A'A.HM = A'G.AM \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{4}.A'A = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{A'A^2 - \frac{a^2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow A'A^2 = 4\left(A'A^2 - \frac{a^2}{3}\right) \Leftrightarrow 3A'A^2 = \frac{4a^2}{3} \Leftrightarrow A'A^2 = \frac{4a^2}{9} \Leftrightarrow A'A = \frac{2a}{3}.$$

Đường cao của lăng trụ là $A'G = \sqrt{\dfrac{4a^2}{9} - \dfrac{3a^2}{9}} = \dfrac{a}{3}$. Thể tích $V_{LT} = \dfrac{a}{3}.\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 35: Chọn B



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Vì $A'G \perp (ABC)$ và tam giác ABC đều nên $A'ABC$ là hình chóp đều. Kẻ $EF \perp AA'$ và $BC \perp (AA'E)$ nên $d(AA', BC) = EF = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Đặt $A'G = h$

Ta có $A'A = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$.

Tam giác $A'AG$ đồng dạng với tam giác EAF nên

$$\frac{A'A}{EA} = \frac{AG}{FA} = \frac{A'G}{FE} \Rightarrow A'G.EA = A'A.FE \Leftrightarrow h.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}.\frac{a\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \frac{a}{3}.$$

Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = AG.S_{ABC} = \dfrac{a}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Đặt $A'H = x \Rightarrow H'B = x$.

Ta có K là trọng tâm tam giác $AA'B'$

Suy ra $KB = \dfrac{2}{3}A'B = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{4}}$; $KA = \dfrac{2}{3}AH' = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^2 + a^2}$.

ΔKAB vuông tại K nên $KB^2 + KA^2 = AB^2 \Leftrightarrow \dfrac{4}{9}\left(2x^2 + \dfrac{5a^2}{4}\right) = a^2 \Leftrightarrow 8x^2 + 5a^2 = 9a^2$

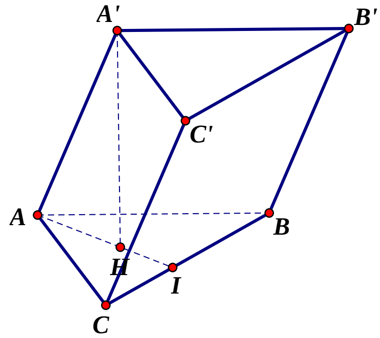
$\Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V=S_{ABC}.A'H=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Câu 36: Chọn B

Gọi AI là đường cao, H là tâm của tam giác $ABC\Rightarrow A'H\perp(ABC)$.

Vì $\begin{cases}AA'\cap(ABC)=A\\A'H\perp(ABC)\end{cases}\Rightarrow$ góc giữa AA' và (ABC) là $A'AH\Rightarrow A'AH=45^\circ$.



Ta có: $AI=\frac{3a\sqrt{3}}{2},AH=\frac{2}{3}AI=a\sqrt{3}$,

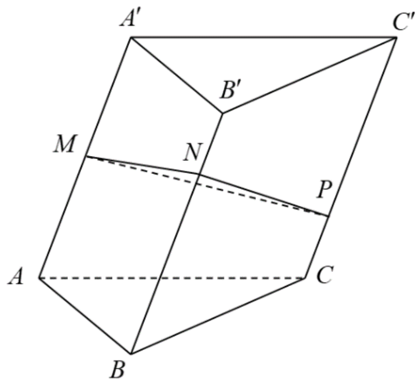
$S_{ABC}=\frac{(3a)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}$.

$A'H=AH.\tan45^\circ=AH=a\sqrt{3}$.

Thể tích của lăng trụ là: $V=A'H.S_{ABC}=a\sqrt{3}.\frac{9a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{27a^3}{4}$.

.

Câu 37: Chọn C

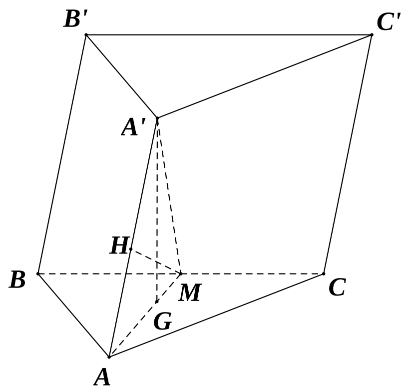


Áp dụng công thức : $\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{1}{3}\left(\frac{AM}{AA'}+\frac{BN}{BB'}+\frac{CP}{CC'}\right)$.

Ta có : $V_{ABC.MNP}=V_{ABC.A'B'C'}$ nên $\frac{1}{3}\left(\frac{AM}{AA'}+\frac{BN}{BB'}+\frac{CP}{CC'}\right)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left(\frac{\frac{1}{2}AA'}{AA'}+\frac{\frac{2}{3}BB'}{BB'}+\frac{CP}{CC'}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{CP}{CC'}=\frac{1}{3}$.

Câu 38: Chọn D



Do ΔABC đều trọng tâm G và $A'G\perp(ABC)$ nên $A'.ABC$ là hình chóp đều.

Gọi M là trung điểm của BC, khi đó $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AG=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

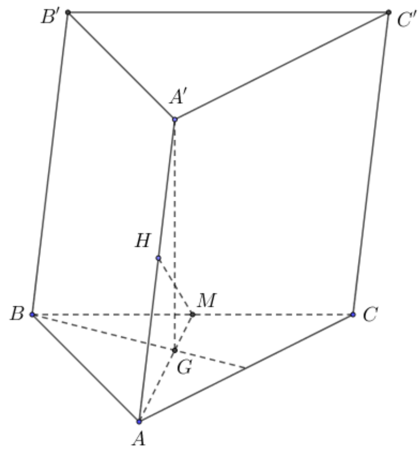
Gọi H là hình chiếu của M trên AA'. Khi đó do $BC\perp(AA'M)\Rightarrow BC\perp HM$ nên HM là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AA' và BC. Do đó $HM=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Đặt $AA'=A'B=A'C=x$, khi đó $A'G=\sqrt{x^2-\frac{a^2}{3}}$.

Do $2S_{\Delta AA'M}=A'G.AM=MH.AA'\Rightarrow\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{x^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{4}.x\Rightarrow x=\frac{2a}{3}$.

Do $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $A'G=\dfrac{a}{3}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=A'G.S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 39: Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ $MH\perp AA'$ $(H\in BC)$.

Ta có $AM\perp BC$, $A'G\perp BC$ $\Rightarrow BC\perp(A'AG)\Rightarrow BC\perp MH$

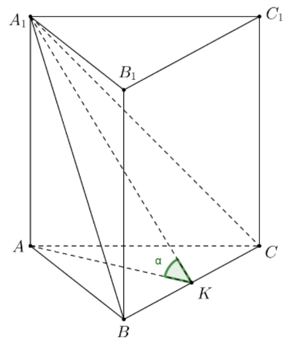
$\Rightarrow d(AA',BC)=MH$.

$AH=\sqrt{AM^2-MH^2}=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{3a^2}{16}}=\dfrac{3a}{4}$.

Ta có $\dfrac{MH}{AH}=\dfrac{A'G}{AG}=\tan GAH\Rightarrow A'G=\dfrac{MH.AG}{AH}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{3a}{4}}$

$=\dfrac{a}{3}$. Vậy $V=S_{ABC}.A'G=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{3}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 40: Chọn D



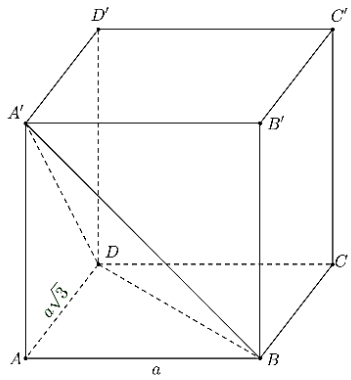
Đặt $BC=x$ và gọi K là trung điểm của BC, ta có $A_1KA=30^\circ$.

Ta có

$$A_1K=\frac{AK}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=x\Rightarrow S_{A_1BC}=\frac{1}{2}A_1K\cdot BC=\frac{x^2}{2}=8\Leftrightarrow x=4$$

Do đó $h=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\cdot\tan 30^\circ=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=2\Rightarrow V=Sh=\dfrac{4^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2=8\sqrt{3}$.

Câu 41: Chọn B

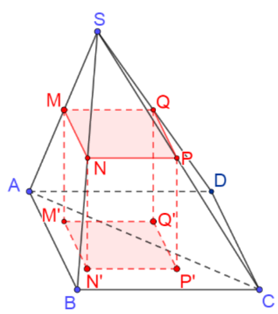


Ta có $\dfrac{1}{d_A^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}+\dfrac{1}{AA'^2}$

$$\Rightarrow\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{15}}{5}\right)^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a\sqrt{3})^2}+\frac{1}{AA^2}\Rightarrow AA'=\sqrt{3}a.$$

Vậy $V=a\cdot\sqrt{3}a\cdot\sqrt{3}a=3a^3$.

Câu 42: Chọn C



Gọi h là chiều cao của khối chóp và $h'=MM'$ là chiều cao khối hộp chữ nhật.

Theo Thales, ta có:

$$x=\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}=\frac{SP}{SC}=\frac{SQ}{SD}=\frac{MN}{AB}=\frac{NP}{BC}\Rightarrow\frac{h'}{h}=\frac{AM}{AS}=1-\frac{SM}{SA}=1-x.$$

Do đó $V=\dfrac{1}{3}AB.BC.h$ và

$V'=MN.NP.h'=x^2.AB.BC.(1-x)h=3x^2(1-x)V$.

Xét hàm số $f(x)=3x^2(1-x)=3x^2-3x^3$ với $x\in(0;1)$

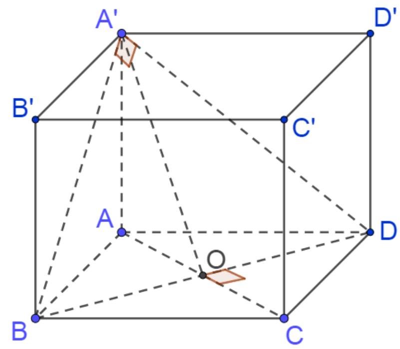
$$\Rightarrow f'(x) = 6x - 9x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{9}$	$\searrow$	

Vậy $\max\limits_{(0;1)} f(x) = \dfrac{4}{9}$ $V'_{\max} = \dfrac{4}{9}V$.

Câu 43: Chọn A



Ta có:

$$\frac{S_{ACC'A'}}{S_{BDD'B'}} = \frac{AC.CC'}{BD.DD'} = \frac{AC}{BD}(CC' = DD')$$

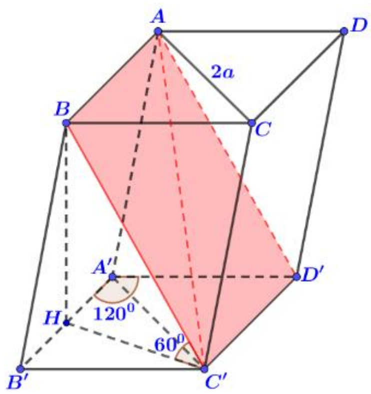
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{AC}{BD} \Rightarrow BD = AC\sqrt{5}.$$

Ta có $AA' = \sqrt{OA'^2 - OA^2} = \sqrt{\dfrac{BD^2}{4} - \dfrac{AC^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{5.AC^2}{4} - \dfrac{AC^2}{4}} = AC$

$\Rightarrow S_{ACC'A'} = AC.AA' = AC^2 = 1 \Rightarrow AC = 1$ và $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}.AC.BD = \dfrac{\sqrt{5}}{2}AC^2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy thể tích khối hộp đứng là $V = \sqrt{\dfrac{S_{ABCD}.S_{ACC'A'}.S_{BDD'B'}}{2}} = \sqrt{\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}.1.\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 44: Chọn B



Gọi H là trung điểm $A'B'$, suy ra $BH \perp (A'B'C'D')$.

Vì $A'B'C'D'$ là hình thoi và $B'A'D' = 120^\circ \Rightarrow \Delta A'B'C'$ là tam giác đều cạnh $2a$.

Ta có:

$$\begin{cases} (AC'D') \cap (A'B'C'D') = C'D' \\ HC' \perp C'D' \\ BC' \perp C'D' \end{cases}.$$

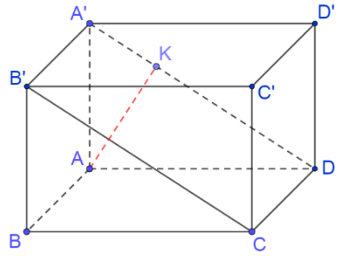
$$\Rightarrow ((AC'D'),(A'B'C'D')) = BC'H = 60^\circ$$

Có $\Delta A'B'C'$ đều cạnh $2a$ nên $C'H = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.2a = \sqrt{3}a$.

Xét tam giác BHC' vuông tại H có: $\tan 60^\circ = \dfrac{BH}{C'H} \Rightarrow BH = C'H \tan 60^\circ = 3a$.

$S_{A'B'C'D'} = 2S_{A'B'C'} = 2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}.(2a)^2 = 2\sqrt{3}a^2$.

Vậy, $V_{ABCD.A'B'C'D'} = BH.S_{A'B'C'} = 3a.2\sqrt{3}a^2 = 6\sqrt{3}a^3$.



Câu 45: Chọn D

Dựng $AK \perp A'D$

$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp DD' \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ADD'A') \Rightarrow CD \perp AK$

Vậy $AK \perp (CDA'B')$

Ta có: $A'D = 5$ và $AB//CD \Rightarrow AB//(A'B'CD)$

$\Rightarrow d(AB, A'D) = d(A,(A'B'CD)) = AK = 2$. Do đó với $AD = a$, $AA' = b$ $(b > a)$, ta có:

$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ ab = 2.5 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2\sqrt{5} \\ a = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow V = a^2b = 10\sqrt{5}$.

Câu 46: Chọn B

Ta có $V_{(H')} = V_{(H)} + 6V_{S.ABCD}$. Với $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều như hình vẽ.

Ta có $SH = HM.\tan 45° = HM = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1^2.\frac{1}{2}}{3} = \dfrac{1}{6}$. Do đó $V_{(H')} = 1 + 6.\dfrac{1}{6} = 2$.

Câu 47: Chọn A

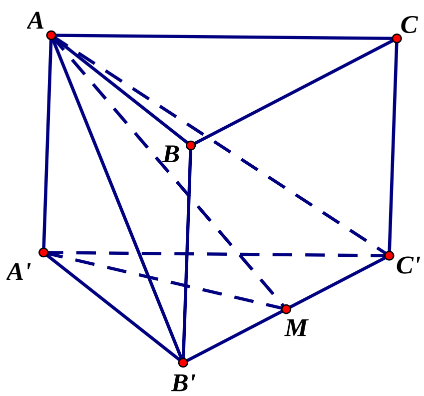
Theo giả thiết có $a, b, c \in [1;4]$ và $a + b + c = 6$; $S_{tp} = 2(ab + bc + ca)$.

$a\ ,\ b\ ,\ c \in [1;4] \Rightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1)(c-1) \ge 0 \\ (a-4)(b-4)(c-4) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} abc + (a+b+c) - (ab+bc+ca) - 1 \ge 0 \\ 64 - 16(a+b+c) + 4(ab+bc+ca) - abc \ge 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 63 - 15(a+b+c) + 3(ab+bc+ca) \ge 0 \qquad \Rightarrow 63 - 15 + 3(ab+bc+ca) \ge 0$

$\Rightarrow ab + bc + ca \ge \dfrac{90-63}{3} = 9 \Rightarrow S_{tp} \ge 18$.

Câu 48: Chọn C



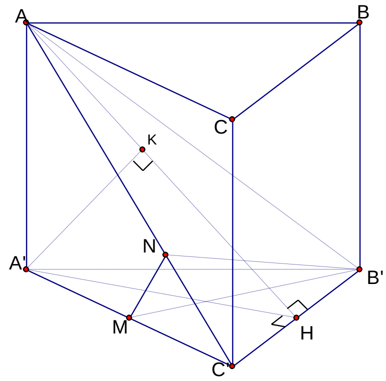
Gọi M là trung điểm của $B'C'$. Khi đó $A'M \perp B'C'$ và $AM \perp B'C'$ $\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và đáy là $AMA' = 30°$.

Trong tam giác vuông $A'MB'$ ta có $A'M = A'B'.\cos B'A'M = \dfrac{a}{2}$.

Trong tam giác vuông $AA'M$ có: $AA' = A'M\tan 30° = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = h$.

Diện tích tam giác $A'B'C'$ là $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Câu 49: Chọn A



Đặt độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h. Ta có $V = \dfrac{a^2h\sqrt{3}}{4}$.

Gọi H là trung điểm $B'C'$ và kẻ $A'H \perp AH$ suy ra $A'H \perp \left(AB'C'\right)$.

Vậy theo giả thiết ta có $\dfrac{1}{1^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{4}{3a^2} = 1$.

Gọi M là trung điểm $A'C'$ và kẻ $MN \perp AC'$ có $MN \perp AC'$ và $B'M \perp AC'$

$\Rightarrow AC' \perp \left(B'MN\right) \Rightarrow \left(\left(AB'C'\right),\left(ACC'A'\right)\right) = MNB$.

Có $\cos MNB = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow \tan MNB = \sqrt{11} \Leftrightarrow \dfrac{B'M}{MN} = \sqrt{11} \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{ah}{2\sqrt{a^2+h^2}}} = \sqrt{11}$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{a^2+h^2} = h\sqrt{11}$ trong đó $MN = \dfrac{1}{2}d\left(A', AC'\right) = \dfrac{ah}{2\sqrt{a^2+h^2}}$.

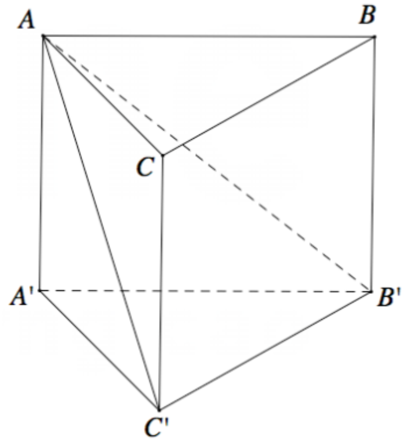
Giải hệ trên ta được $a = 2, h = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Cách 2: chú ý $\Delta AMC'$ là hình chiếu vuông góc của $\Delta AB'C'$ lên mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$

Do đó $\cos\left(\left(AB'C'\right),\left(ACC'A'\right)\right) = \dfrac{S_{AMC}}{S_{AB'C'}} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\dfrac{ah}{4}}{\dfrac{a\sqrt{h^2+\dfrac{3a^2}{4}}}{2}} \Leftrightarrow h = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{4h^2+3a^2}$

Giải hệ trên ta được $a = 2, h = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 50: Chọn D



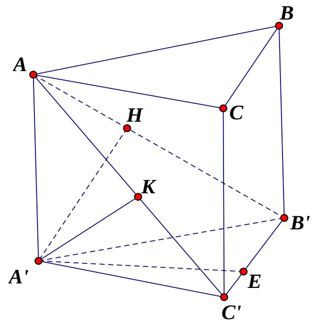
Đặt $A'B'=a$, $A'C'=b$, $AA'=c$ thì $S_{\Delta A'B'C'}=\frac{1}{2}ab$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=\frac{1}{2}abc$.

Ta có $\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{d^2\left(A',AB'\right)}=1\\ \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{d^2\left(A',AC'\right)}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{d^2\left(A',\left(AB'C'\right)\right)}=\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a^2}=\frac{5}{6}\\ \frac{1}{b^2}=\frac{1}{3}\\ \frac{1}{c^2}=\frac{1}{6}\end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2b^2c^2}=\frac{5}{108}$ $\Rightarrow abc=\frac{6\sqrt{15}}{5}$. Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=\frac{3\sqrt{15}}{5}$.

Câu 51: Chọn D



Trong $(ACA'C')$ kẻ $A'K\perp AC'\Rightarrow A'K=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Trong $(ABA'B')$ kẻ $A'H\perp AB'\Rightarrow A'H=1$.

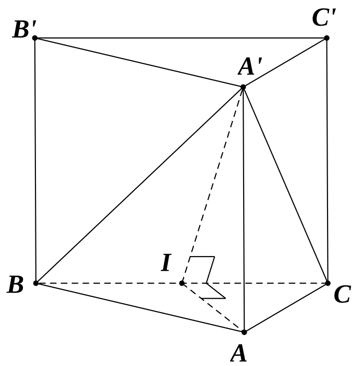
Trong $(A'B'C')$ kẻ $A'E\perp B'C'\Rightarrow A'E=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $A'B'=a; A'C'=b; AA'=c$.

Ta có $\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{A'H^2}=1\\ \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{A'K^2}=\frac{4}{3}\\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{A'E^2}=2\end{cases}$, Cộng theo vế ta có: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{13}{6}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a^2}=\frac{5}{6}\\ \frac{1}{b^2}=\frac{7}{6}\\ \frac{1}{c^2}=\frac{1}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{\frac{6}{5}}\\ b=\sqrt{\frac{6}{7}}\\ c=\sqrt{6}\end{cases}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'}=\mathrm{AA}'.\frac{1}{2}.AB.AC=\frac{3\sqrt{210}}{35}$.

Câu 52: Chọn C



Gọi I là trung điểm $BC\Leftrightarrow\left(A'BC,ABC\right)=A'IA=\alpha$.

Gọi $BC=x\left(x>0\right)\Leftrightarrow A'I=\frac{2S_{A'BC}}{BC}=\frac{6}{x}$.

$AI=\frac{x\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AA'=\sqrt{\frac{36}{x^2}-\frac{3x^2}{4}}=\sqrt{\frac{144-3x^4}{2x^2}}=\frac{\sqrt{144-3x^4}}{2x}$.

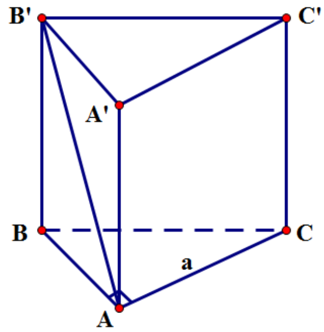
$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{ABC}=\frac{\sqrt{144-3x^4}}{2x}.\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{8}x\sqrt{144-3x^4}$.

Đặt $f\left(x\right)=x\sqrt{144-3x^4}\Rightarrow f'\left(x\right)=\sqrt{144-3x^4}-\frac{12x^4}{2\sqrt{144-3x^4}}=0\Leftrightarrow x=2$.

$\Rightarrow f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất thì thể tích khối lăng trụ lớn nhất khi $x=2$.

$\Rightarrow AA'=\sqrt{6}, AI=\sqrt{3}\Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{AA'}{AI}=\sqrt{2}$.

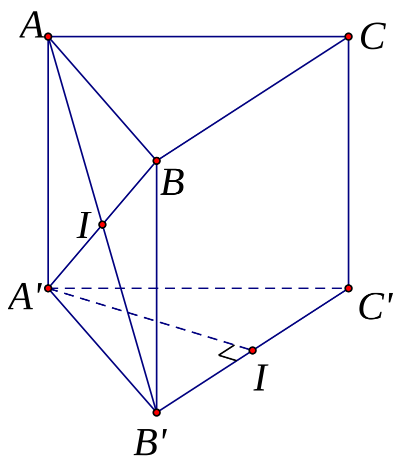
Câu 53: Chọn C



Ta có $\begin{cases} CC'//AA' \\ AA'\subset(\mathrm{AA'B'B}) \end{cases}\Rightarrow CC'//(\mathrm{AA'B'B})$ nên khoảng cách giữa AB' và CC' là khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(\mathrm{AA'B'B})$.

Mặt khác $\begin{cases} CA\perp AB \\ CA\perp AA' \end{cases}\Rightarrow CA\perp(\mathrm{AA'B'B})$ suy ra khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(\mathrm{AA'B'B})$ là $CA=a\Rightarrow AB=AC=a\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AC.AB=\dfrac{a^2}{2}$. Lại có tứ giác $BCC'B'$ là hình vuông nên $CC'=BC=a\sqrt{2}$. Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'}=CC'.S_{\Delta ABC}=a\sqrt{2}.\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 54: Chọn A



Đặt cạnh của đáy là x.

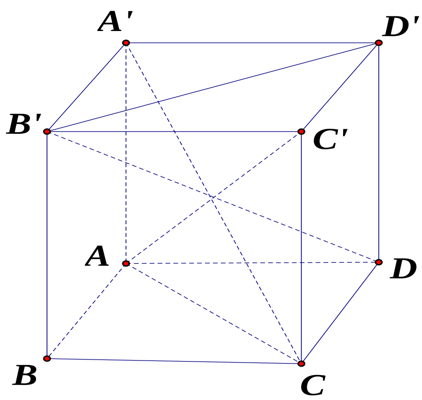
Gọi I là trung điểm $B'C'$, ta có $d(A';(BCC'B'))=A'I=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

$d(I;(BCC'B'))=\dfrac{1}{2}d(A';(BCC'B'))=\dfrac{x\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=2a$.

$S_{\Delta A'B'C'}=\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ: $V=a^2\sqrt{3}.a\sqrt{3}=3a^3$

Câu 55: Chọn D

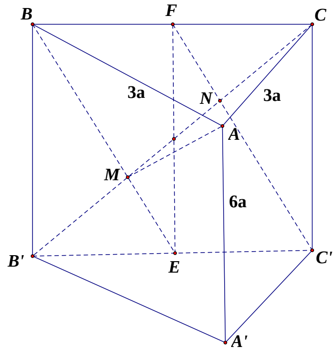


Theo giả thiết ta có được đáy $ABCD$ là hình bình hành, độ dài các đường chéo $BD=a, AC=a\sqrt{3}, BAD=60^0$.

Đặt $AB=x, BC=y$, áp dụng định lý hàm số cosin cho hai tam giác ABD và ABC ta được.

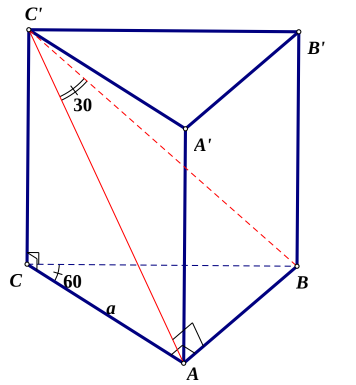
$\begin{cases} 3a^2=x^2+y^2+xy \\ a^2=x^2+y^2-xy \end{cases}\Rightarrow xy=a^2$. Khi đó $V=a.xy.\sin 60^0=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Câu 56: Chọn C



Gọi F là trung điểm của BC, $FC'\cap CB'=N\Rightarrow N$ là trung điểm của $MC\Rightarrow B'M=\frac{1}{3}B'C$. Khi đó ta có $V_{ABCM}=\frac{1}{3}d\left(M,\left(ABC\right)\right).S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}d\left(B',\left(ABC\right)\right).S_{ABC}=\frac{2.6a}{9}.\frac{9a^2}{2}=6a^3$.

Câu 57: Chọn A

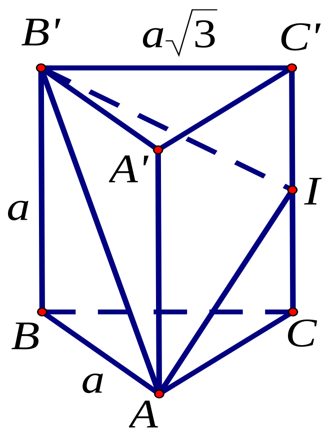


Ta có $AB=a\sqrt{3}$, dễ thấy góc giữa đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $\left(A'C'CA\right)$ là góc $BC'A=30°$. Suy ra $\tan 30°=\frac{a\sqrt{3}}{AC'}$

$\Rightarrow AC'=3a\Rightarrow C'C=2\sqrt{2}a$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=2\sqrt{2}a.\frac{1}{2}a.a\sqrt{3}=a^3\sqrt{6}$.

Câu 58: Chọn C



Ta có $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos BAC=a^2+a^2-2.a.a.\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=3a^2\Rightarrow BC=a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông $B'AB$ có $AB'=\sqrt{BB'^2+AB^2}=\sqrt{a^2+a^2}$

$=a\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông IAC có $IA=\sqrt{IC^2+AC^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác vuông $IB'C'$ có $B'I=\sqrt{B'C'^2+C'I^2}=\sqrt{3a^2+\frac{a^2}{4}}$

$=\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Xét tam giác $IB'A$ có $B'A^2+IA^2=2a^2+\frac{5a^2}{4}=\frac{13a^2}{4}=B'I^2\Rightarrow\Delta IB'A$ vuông tại A

$\Rightarrow S_{IB'A}=\frac{1}{2}AB'.AI=\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}=\frac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Lại có $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin BAC=\frac{1}{2}a.a.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi góc tạo bởi hai mặt phẳng $\left(ABC\right)$ và $\left(AB'I\right)$ là α.

Ta có ΔABC là hình chiếu vuông góc của $\Delta AB'I$ trên mặt phẳng (ABC).

Do đó $S_{ABC} = S_{IB'A}.\cos\alpha \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

Câu 59: ChọnA

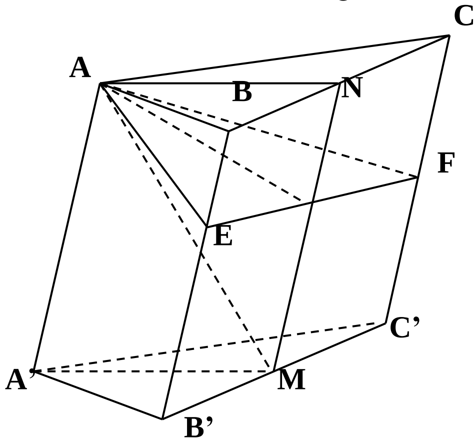
Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB', CC' ta có $AH = d(A,BB') = 1; AK = d(A,CC') = 2$ và $\mathrm{AA'//BB'//CC';AH \perp BB',AK \perp CC'}$

$\Rightarrow (AHK) \perp AA'$ và $HK = d(\mathrm{C,BB'}) = \sqrt{5}$

Tam giác AHK có $AH^2 + AK^2 = HK^2 = 5 \Rightarrow \Delta AHK$ vuông tại A $\Rightarrow S_{AHK} = \frac{1}{2}AH.AK = 1$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{AHK}.\mathrm{AA'} = 2.$

Câu 60: Chọn D



Cách 1: Gọi N là trung điểm của BC, $H = \mathrm{EF} \cap \mathrm{MN} \Rightarrow \mathrm{AH} \perp \mathrm{MN(MN//AA')}$. Ta có H là trung điểm của EF và $AE^2 + \mathrm{AF}^2 = EF^2 = 5$ nên $AH = \frac{EF}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Tam giác vuông AMN có $AN = A'M = \sqrt{5}$ và

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow AM = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow \mathrm{AA'} = \sqrt{5 + \frac{15}{9}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

Mặt khác do $\begin{cases} (A'B'C') \perp \mathrm{AM} \\ (AEF) \perp \mathrm{AA'} \end{cases} \Rightarrow ((A'B'C'),(AEF)) = (AM, \mathrm{AA'}) = \angle \mathrm{MAA'}.$

Tam giác AEF vuông tại A là hình chiếu vuông góc của tam giác A'B'C' trên mặt phẳng (AEF) Vì vậy theo định lý hình chiếu có

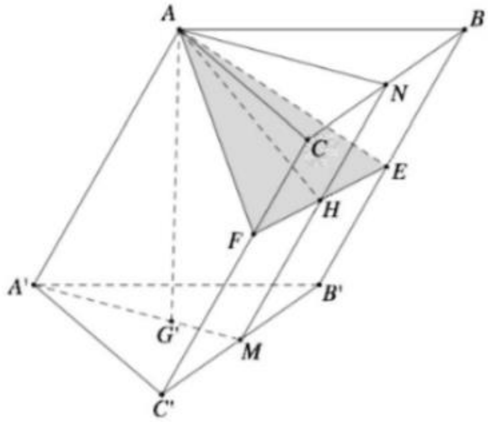
$$S_{A'B'C'} = \frac{S_{AEF}}{\cos\angle MAA'} = \frac{\frac{1}{2}.1.2}{\frac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{2\sqrt{15}}{3}}} = 2 \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{A'B'C'}.AM = 2.\frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

Cách 2: Ta có thể tính thông qua công thức nhanh thể tích tứ diện như sau

Có $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A.A'B'C'} = \frac{2S_{AA'B'}.S_{AA'C'}.\sin((\mathrm{AA'B'}),(\mathrm{AA'C'}))}{3AA'} = AA' = \frac{2\sqrt{15}}{3}$

$$\begin{cases} S_{AA'B'} = \dfrac{1}{2}AA'.d(B', AA') = \dfrac{1}{2}AA'.d(A, BB') = \dfrac{1}{2}AA' \\ S_{AA'C'} = \dfrac{1}{2}AA'.d(\mathrm{C}', AA') = \dfrac{1}{2}AA'.d(A, \mathrm{CC}') = AA' \\ ((AA'B'), (\mathrm{AA'C'})) = 90^0 \end{cases}$$

Câu 61: Chọn D



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BB', CC'.

Suy ra $\begin{cases} AA' \perp AE \\ AA' \perp AF \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (AEF)$.

Suy ra hình chiếu vuông góc của $\Delta A'B'C'$ lên mặt phẳng (AEF) là ΔAEF.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'C')$ và (AEF).

Ta có $S_{\Delta AEF} = S_{\Delta A'B'C'}.\cos\varphi \Rightarrow S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{S_{\Delta AEF}}{\cos\varphi}$ (1)

Mặt khác, ta có $\begin{cases} AA' \perp (AEF) \\ AG' \perp (A'B'C') \end{cases} \Rightarrow \varphi = (AA', AG') = A'AG'$

Suy ra $\cos\varphi = \dfrac{AG'}{AA'} \Rightarrow AG' = \cos\varphi.AA'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $V_{A'B'C'.ABC} = AG'.S_{\Delta A'B'C'} = AA'.S_{\Delta AEF}$.

Ta có $AE = 1, AF = \sqrt{3}$, $d(C; BB') = d(E; BB') = EF \Rightarrow EF = 2$. Suy ra ΔAEF vuông tại A.

Suy ra $S_{\Delta AEF} = \dfrac{1}{2}AE.AF = \dfrac{1}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi M, N lần lượt trung điểm của $BC, B'C'$.

Giả sử MN cắt EF tại H. Suy ra $MN \perp EF$ và H là trung điểm của EF nên $AH = \dfrac{EF}{2} = 1$.

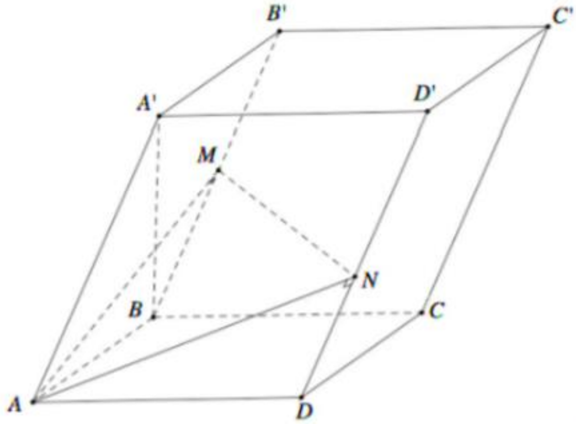
$A'G' = \dfrac{4}{3} \Rightarrow A'M = \dfrac{3}{2}A'G' = 2$.

Xét hình bình hành $AA'MN$ có:

$$S_{AA'MN} = AG'.A'M = AH.MN \Leftrightarrow \sqrt{AA'^2 - \left(\dfrac{4}{3}\right)^2}.2 = 1.AA' \Leftrightarrow AA' = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}.$$

Thể tích khối lăng trụ là: $V_{A'B'C'.ABC} = AA'.S_{\Delta AEF} = \frac{8\sqrt{3}}{9}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3}$.

Câu 62: Chọn C



Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các cạnh BB', DD'.

Ta có: $\begin{cases} AM \perp BB' \\ AN \perp DD' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM \perp AA' \\ AN \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (AMN) \Rightarrow \begin{cases} BB' \perp (AMN) \\ DD' \perp (AMN) \end{cases}$

Suy ra hình chiếu vuông góc của $\Delta A'B'D'$ lên mặt phẳng (AMN) là ΔAMN.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'D')$ và (AMN)

Ta có $S_{\Delta AMN} = S_{\Delta A'B'D'}.\cos\varphi \Rightarrow S_{\Delta A'B'D'} = \frac{S_{\Delta AMN}}{\cos\varphi}$ (1)

Mặt khác, ta có $\begin{cases} AA' \perp (AMN) \\ A'B \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \varphi = (AA', A'B) = AA'B$

Suy ra $\cos\varphi = \frac{A'B}{AA'} \Rightarrow A'B = \cos\varphi.AA'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $V_{A'B'D'.ABD} = A'B.S_{\Delta A'B'D'} = AA'.S_{\Delta AMN}$

Vậy thể tích khối hộp là: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2V_{ABD.A'B'D'} = 2AA'.S_{\Delta AMN}$.

Ta có $\begin{cases} (BB'C'C) // (ADD'A') \\ (C'CDD') // (ABB'A') \end{cases} \Rightarrow ((ADD'A');(ABB'A')) = (AM; AN)$.

Suy ra $MAN = 60^\circ$ hoặc $MAN = 120^\circ$. $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin MAN = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Ta có $(AA';(ABCD)) = (AA'; AB) = A'AB \Rightarrow A'AB = 45^\circ$. Suy ra $\Delta A'AB$ vuông cân tại B.

$S_{\square ABB'A'} = AM.BB' = A'B.AB$. Suy ra $AM.AA' = \frac{AA'}{\sqrt{2}}.\frac{AA'}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow AA' = 2AM = 2.1 = 2$.

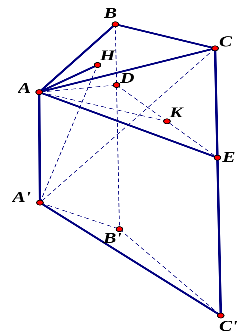
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 2.2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

Câu 63: Chọn D

Ta hạ: $AD \perp BB'; AE \perp CC' \Rightarrow (ADE) \perp AA'//BB'//CC'$ và $AD = 1; AE = \sqrt{3}, DE = 2$.

Ta hạ: $A'H \perp (ABC)$; $Do: AA' \perp (ADE) \Rightarrow ((ABC),(ADE)) = (A'H, AA') = A\hat{A}'H$

Tam giác ADE là hình chiếu của tam giác ABC lên mp(ADE), do đó:



$$S_{ADE} = S_{ABC}.\cos A\hat{A}'H \Rightarrow S_{ABC} = \frac{S_{ADE}}{\cos A\hat{A}'H} = \frac{S_{ADE}.AA'}{A'H}$$

$$\Rightarrow V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}.A'H.S_{ABC} = \frac{1}{3}.S_{ADE}.AA' = \frac{1}{3}d\left(A',(BCC'B')\right).S_{BCC'B'}$$

Ta có: $BB' \perp (ADE); BB' \perp DE$.

Ta kẻ: $AK \perp DE \Rightarrow AK \perp BB' \Rightarrow AK \perp (BCC'B')$

$$\Rightarrow d\left(A',(BCC'B')\right) = d\left(A,(BCC'B')\right) = AK$$

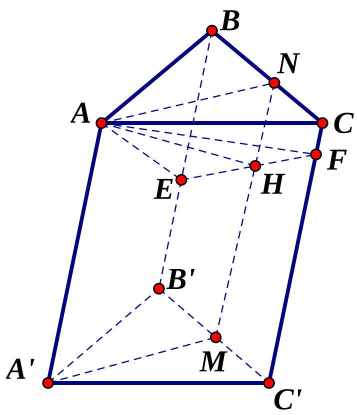
$$V_{A'.BCC'B'} = \frac{1}{3}.AK.\frac{1}{2}DE(BB'+CC') = \frac{1}{3}.S_{ADE}.(BB'+CC')$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = V_{A'.ABC} + V_{A'.BCC'B'} = \frac{1}{3}.S_{ADE}.AA' + \frac{1}{3}.S_{ADE}.(BB'+CC') = \frac{1}{3}.S_{ADE}.(AA'+BB'+CC')$$

Tam giác ADE vuông tại A và

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ADE}.\frac{AA'+BB'+CC'}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1+2+3}{3} = \sqrt{3}$$

Câu 64: Chọn A



Gọi *E, F* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A* lên *BB', CC'*. Ta có: $AE = 1, AF = 2; AA'//BB'//CC'$

Vậy: $AF \perp AA'; AE \perp AA' \Rightarrow (AEF) \perp AA'$

Suy ra:

$$EAF = ((ABB'A'),(ACC'A')) = 90^O \Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2}AE.AF = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Gọi N là trung điểm BC, H là giao của EF và MN nên $AH \perp MN\ (MN//AA')$.

Ta có H là trung điểm EF và $AH = \frac{EF}{2} = \frac{\sqrt{AE^2 + AF^2}}{2} = 1$. Tam giác vuông AMN có:

$AN = A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ và $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow AM = 2 \Rightarrow AA' = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{AEF}.AA' = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{4\sqrt{3}}{3} = 2$

DẠNG 3 Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Câu 1: Tính thể tích V của khối tứ diện đều có cạnh bằng a.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

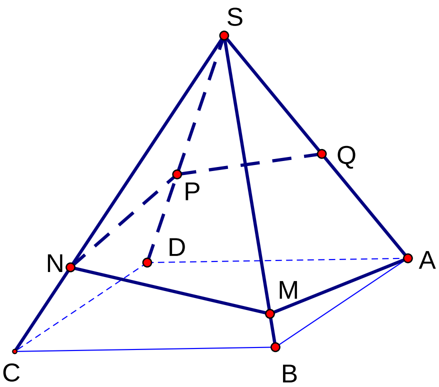
Câu 2: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng a, mặt phẳng chứa BC và vuông góc với SA cắt khối chóp theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{a^2}{4}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{\sqrt{2}a^2}{24}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3}{36}$. **D.** $V=\frac{a^3}{72}$.

Câu 3: Cho khối chóp tứ giác đều $SABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB,SD. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại J.Diện tích tứ giác $AMJN$ bằng $\frac{a^2\sqrt{5}}{6}$. Tính thể tích của khối chóp $SABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Câu 4: Bên cạnh con đường nước đi vào thành phố, người ta xây một ngọn tháp hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có $SA=600m$, $ASB=15^0$. Do sự cố đường dây điện tại điểm Q (trung điểm của SA) bị hỏng nên người ta tạo ra một con đường từ A đến Q gồm bốn đoạn AM,MN,NP,PQ (như hình vẽ). Để tiết kiệm chi phí, kỹ sư đã nghiên cứu và có được chiều dài con đường từ A đến Q nhỏ nhất. Tính tỉ số $k=\frac{AM+MN}{NP+PQ}$



A. $k=2$ **B.** $k=\frac{5}{3}$ **C.** $k=\frac{3}{2}$ **D.** $k=\frac{4}{3}$

Câu 5: Trong tất cả các khối chóp tam giác đều có diện tích toàn phần cho trước. Gọi a,b lần lượt là độ dài cạnh đáy và độ dài cạnh bên của khối chóp. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$ khi thể tích của khối chóp đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{b}{a}=1$ **B.** $\frac{b}{a}=\sqrt{2}$ **C.** $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$ **D.** $\frac{b}{a}=2$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA=1$, tất cả các cạnh còn lại bằng $\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=1$, $AC=2$ và $SA=SB=SC=\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{7}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{17}}{6}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có $BAC=135°$, $AB=AC=1$ và $SA=SB=SC=2$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{2}$.

Câu 9: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=SB=AB=AC=a, SC=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{36}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{14}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{21}}{36}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{21}}{12}$.

Câu 10: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $SA=SB=SC=AD=2a$, $AB=BC=CD=a$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\frac{9a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{12}$.

Câu 11: Trong các khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng b thỏa mãn $4a+b=6\sqrt{2}$. Khối chóp có thể tích lớn nhất là.

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 12: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA=SB=SC=SD=\sqrt{3}a$ và $AB=BC=CD=a, AD=2a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **B.** $\frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{6}a^3}{2}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông, $SA=SB=SC=1$ và cùng tạo với đáy một góc α. Tính $\cos\alpha$ khi thể tích của khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a\sqrt{3}$, $AB=AC=2a, BC=3a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$

A. $\frac{\sqrt{5}a^3}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{35}a^3}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{35}a^3}{6}$. **D.** $\frac{2a^3\sqrt{5}}{7}$.

Câu 15: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) và góc giữa SB và mặt đáy bằng 30°. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{a^3}{4}$. **B.** $V=\frac{a^3}{12}$. **C.** $V=\frac{3a^3}{4}$. **D.** $V=\frac{9a^3}{4}$.

Câu 16: Cho khối chóp $S.ABCD$ có chiều cao SA bằng a. Mặt đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc ABC bằng 60°. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, cạnh bên SB hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB=2a$, $BAC=60°$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA=a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V=2a^3$. **B.** $V=3a^3$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=4a^3$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA=a$, $BAC=30°$, $SCA=45°$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỉ số $\dfrac{V}{a^3}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. $0{,}01$. **B.** $0{,}05$. **C.** $0{,}08$. **D.** 1.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=2a, AD=a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy và góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SBD) là $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỉ số $\dfrac{V}{a^3}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. $0{,}25$. **B.** $0{,}5$. **C.** $0{,}75$. **D.** $1{,}5$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với đáy và $AB=a; AC=2a$ và $BAC=120^0$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{21}}{14}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{21}}{13}$ **C.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{21}}{14}$. **D.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{21}}{13}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB=3a; AD=4a$, $SA\perp(ABCD)$, SC tạo với đáy góc 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $V=20a^3$. **B.** $V=20\sqrt{2}a^3$ **C.** $V=30a^3$. **D.** $V=30\sqrt{2}a^3$.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ có $AD\perp(ABC)$ và $AB=3a; BC=4a; AC=5a; AD=6a$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

A. $V=6a^3$. **B.** $V=12a^3$. **C.** $V=18a^3$. **D.** $V=36a^3$.

Câu 24: Cho khối tứ diện $SABC$ có $SA\perp(ABC)$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau; $SB=a\sqrt{3}$, $BSC=45^0$, $ASB=30^0$. ThỂ tích khối tứ diện $SABC$ là V. Tính tỉ số $\dfrac{a^3}{V}$.

A. $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A,D; $SD\perp(ABCD)$; $AB=AD=a; CD=3a; SA=a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V = \frac{2a^3}{3}$. **B.** $V = \frac{4a^3}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là 30^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V. Tính $\frac{3V}{a^3}$?

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$,đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, cạnh SC hợp với đáy một góc 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là?

A. $V = a^3$. **B.** $V = 2a^3$. **C.** $V = a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác. ABC .vuông tại $B, AB = a, ACB = 60^0$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB tạo với mặt đáy một góc bằng 45^0. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là?

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 29: Cho tứ $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh a. AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa BD và mặt phẳng (DAC) là 30^0. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là V. Tính tỉ số $\frac{a^3\sqrt{6}}{V}$.

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 12.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $20cm$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 30cm$. Gọi B', D' là hình chiếu của A lên SB, SD. Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C'. Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là

A. $1466(cm^3)$. **B.** $1500(cm^3)$. **C.** $1400(cm^3)$. **D.** $1540(cm^3)$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A. $BC = a\sqrt{2}$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt bên (SBC) tạo với đáy một góc 45^0. Thể tich khối chóp $S.ABC$ là V. Tính tỷ số $\frac{6V}{a^3}$?

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3, góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy bằng α. Tính $cos\alpha$ khi khối chóp có thể tích nhỏ nhất.

A. $cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $cos\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Câu 33: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = 8, BC = 6$. Biết $SA = 6$ và vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Một điểm trong M của khối chóp cách đều tất cả các mặt của khối chóp một đoạn bằng h. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $h=\frac{4}{3}$. **B.** $h=\frac{4}{9}$. **C.** $h=\frac{2}{3}$. **D.** $h=\frac{2}{9}$.

Câu 34: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB=8, BC=6$. Biết $SA=6$ và vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Một điểm M thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và cách đều tất cả các mặt của khối chóp. Tính thể tích khối tứ diện $M.ABC$.

A. $V=24$. **B.** $V=\frac{64}{3}$. **C.** $V=\frac{32}{3}$. **D.** $V=12$.

Câu 35: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, AB=2a, SA$ vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{4a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{8a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{9a^3}{8}$. **C.** $V=8a^3$. **D.** $V=\frac{27a^3}{8}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB=2a$, $BAC=45°$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC bằng $\frac{4a}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $V=\sqrt{2}a^3$. **C.** $V=4\sqrt{2}a^3$. **D.** $V=\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $BAC=\alpha$ $(30°<\alpha<90°)$, $AB=6$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC bằng 3. Tính $\cos\alpha$ khi khối chóp $S.ABC$ có thể tích nhỏ nhất.

A. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=1$, cạnh bên $SA=1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Kí hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $MAN=45°$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{\sqrt{2}+1}{9}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}+1}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{9}$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=1$, cạnh bên $SA=1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $MAN=30°$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{27}$. **D.** $\frac{4}{27}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB=1$, cạnh bên $SA=1$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Ký hiệu M là điểm di động trên đoạn CD và N là điểm di động trên đoạn CB sao cho $MAN=60°$. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp $S.AMN$ là?

A. $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{2+\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}-3}{9}$.

Câu 41: Cho tam giác ABC vuông cân tại B, $AC=2$. Trên đường thẳng đi qua A vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy các điểm M, N khác phía với mặt phẳng (ABC) sao cho $AM.AN=1$. Tìm thể tích nhỏ nhất của khối tứ diện $MNBC$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Mặt phẳng (P) thay đổi qua I cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Biết $SA = SB = \sqrt{2}$, $SC = \sqrt{7}$. Hỏi thể tích của khối chóp $S.A'B'C'$ có giá trị nhỏ nhất là?

A. $\frac{243\sqrt{7}}{256}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\frac{81\sqrt{7}}{256}$. **D.** $\frac{27\sqrt{7}}{256}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $SA = AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC. Tìm thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.AHK$.

A. $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B, AB = 2a, SA$ vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm cạnh AB, mặt phẳng (P) qua SM song song với BC cắt AC tại N. Tính thể tích V của khối chóp $S.BCMN$ biết góc giữa (SBC) và đáy bằng 60^0.

A. $V = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V = \sqrt{3}a^3$. **D.** $V = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$

Câu 45: Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc nửa đường tròn sao cho $ABC = 30^0$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại A lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt phẳng $(SAB),(SBC)$ bằng 60^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{\sqrt{6}R^3}{12}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{2}R^3}{6}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{6}R^3}{4}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{2}R^3}{2}$

Câu 46: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, SA vuông góc với đáy, độ dài đường trung tuyến $AD = a$, cạnh bên SB tạo với đáy một góc α và tạo với mặt phẳng (SAD) góc (β). Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{a^3 \sin\alpha \sin\beta}{3(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)}$. **B.** $V = \frac{a^3 \sin\alpha \sin\beta}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

C. $V = \frac{a^3 \sin\alpha \sin\beta}{3(\cos^2\beta - \sin^2\alpha)}$. **D.** $V = \frac{a^3 \sin\alpha \sin\beta}{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}$

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ vuông góc với đáy. Gọi M,N là hai điểm lần lượt trên AB,AD sao cho (SMC), (SNC) vuông góc với nhau. Tính tổng $T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$ khi khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{5}{4}$. **B.** 2. **C.** $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{13}{9}$.

Câu 48: Trong mặt phẳng (P) cho ΔXYZ cố định; Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) tại điểm X và về 2 phía của (P) ta lấy 2 điểm A,B thay đổi sao cho hai mặt phẳng (AYZ) và

(BYZ) luôn vuông góc với nhau. Hỏi vị trí của A,B thỏa mãn điều kiện nào sau đay thì thể tích $ABYZ$ là nhỏ nhất

A. $XB = 2XA$. **B.** $XA = 2XB$. **C.** $XA.XB = YZ^2$. **D.** $XA = XB$.

Câu 49: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 2$, $AC = 3$, $AD = BC = 4$, $BD = 2\sqrt{5}$, $CD = 5$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

A. $V = \sqrt{15}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$. **C.** $V = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **D.** $V = \dfrac{9\sqrt{5}}{2}$.

Câu 50: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Trên đường thẳng Δ qua A vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy hai điểm M,N nằm khác phía với mặt phẳng (ABC) sao cho hai mặt phẳng (MBC) và (NBC) vuông góc với nhau. Thể tích khối tứ diện $MNBC$ có giá trị nhỏ nhất bằng.

A. $\dfrac{a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{8}$.

Câu 51: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a, AD = b$. Trên hai đường thẳng Ax, Cy cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho hai mặt phẳng (BDM) và (BDN) vuông góc với nhau. Thể tích khối tứ diện $BDMN$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\dfrac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **B.** $\dfrac{4a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **C.** $\dfrac{4a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. **D.** $\dfrac{a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$.

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB = 2a$, $\mathrm{BC} = \mathrm{a}$ $ABC = 120^0$ và SD vuông góc với đáy. Sin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{1}{4}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

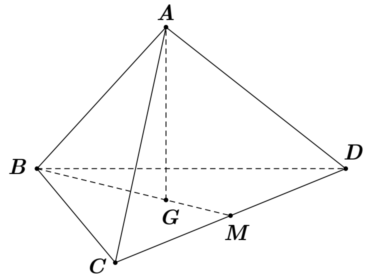
A. a^3. **B.** $\dfrac{a^3}{2}$. **C.** $3a^3$. **D.** $\dfrac{3a^3}{2}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	**2.A**	**3.B**	**4.A**	**5.A**	**6.D**	**7.A**	**8.B**	**9.A**	**10.C**
11.A	**12.A**	**13.B**	**14.D**	**15.B**	**16.A**	**17.B**	**18.A**	**19.C**	**20.C**
21.A	**22.A**	**23.B**	**24.A**	**25.D**	**26.A**	**27.B**	**28.B**	**29.D**	**30.A**
31.C	**32.A**	**33.A**	**34.C**	**35.A**	**36.D**	**37.D**	**38.B**	**39.A**	**40.C**
41.D	**42.C**	**43.A**	**44.C**	**45.A**	**46.A**	**47.A**	**48.D**	**49.A**	**50.A**
51.D	**52.A**								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn B**



Cách tự luận. Gọi G là trọng tâm của ΔBCD.

$BG=\frac{2}{3}BM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $AG=\sqrt{AB^2-BG^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}.AG=\frac{1}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right).\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Cách trắc nghiệm. Ta nhớ trực tiếp kết quả "Tứ diện đều có $V=(canh)^3\frac{\sqrt{2}}{12}$".

Câu 2: **Chọn A**

Gọi M là trung điểm của BC. Gọi O là trọng tâm của ΔABC

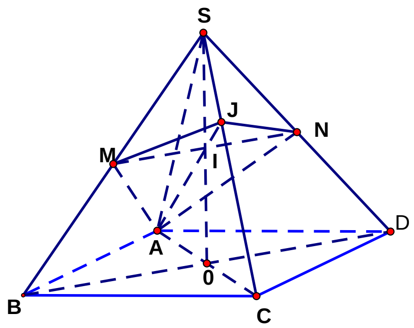
Gọi I là hình chiếu vuông góc của M lên SA. Ta có: $MI\perp SA$ và $BC\perp SA$

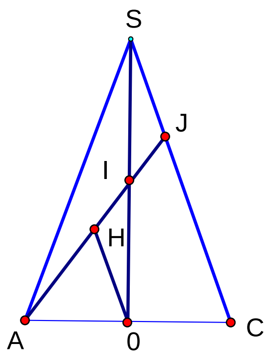
Suy ra $SA\perp(IBC)$. Mặt khác $S_{IBC}=\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}MI.BC=\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}MI.a=\frac{a^2}{4}\Leftrightarrow MI=\frac{a}{2}$

Ta có $AI=\sqrt{AM^2-MI^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\tan MAI=\frac{MI}{AI}=\frac{SO}{AO}\Leftrightarrow SO=\frac{MI.AO}{AI}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$

Vậy $V_{SABC}=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{6}=\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Câu 3:





Giả sử: độ dài cạnh bên là x

Ta có: I là trung điểm của S0 nên $\frac{JS}{JC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{JS}{SC}=\frac{1}{3}$. Dựng OH //SC

Ta có: $\begin{cases}\frac{A0}{AC}=\frac{0H}{JC}\\ \frac{IS}{I0}=\frac{SJ}{0H}\end{cases}\Rightarrow\frac{A0}{AC}.\frac{IS}{I0}=\frac{0H}{JC}.\frac{SJ}{0H}=\frac{SJ}{JC}\Rightarrow\frac{SJ}{JC}=\frac{1}{2}\Rightarrow JC=\frac{2x}{3}$

Xét $\Delta AIC: AJ^2=AC^2+CJ^2-2AI.JC.\cos C=2a^2+\frac{4x^2}{9}-2.a\sqrt{2}.\frac{2x}{3}.\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{x}=\frac{2a^2}{3}+\frac{4x^2}{9}(1)$

$S_{AMJN}=\frac{1}{2}AJ.MN=\frac{\sqrt{5a}}{6}^2\Leftrightarrow\frac{1}{2}AJ.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{5a}}{6}^2\Leftrightarrow AJ=\frac{a\sqrt{10}}{3}(2)$

Từ (1), (2) suy ra: $x=a$. $SO=\sqrt{x^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $V=\frac{1}{3}S0.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

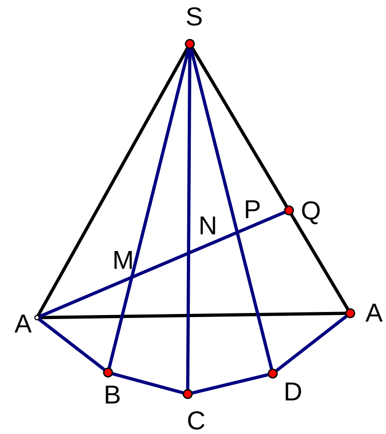
Câu 4: Chọn A

Cắt ngọn tháp và trải đều trên mặt phẳng như hình vẽ

Do $ASB=15^0$ nên khi trải ra ta thu được tam giác đều SAA

Để $AM+MN+NP+PQ$ ngắn nhất thì A,M,N,P,Q thẳng hàng

Khi đó: $N=SC\cap AQ$ là giao 2 đường trung tuyến nên N là trọng tâm tam giác SAA. Do đó: $k=\frac{AM+MN}{NP+PQ}=\frac{AN}{NQ}=2$



Câu 5: Chọn A

Đường cao mặt bên: $h=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$. Diện tích toàn phần:

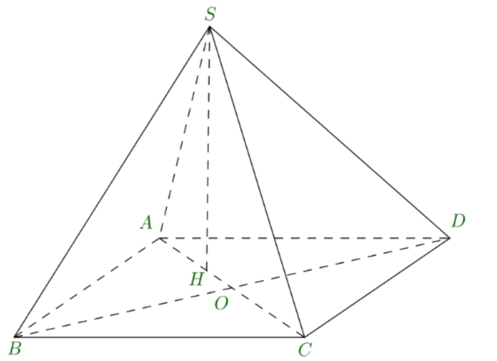
$$S_{tp}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3.\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a^2\sqrt{3}+3a\sqrt{4b^2-a^2}}{4}\Rightarrow b^2=\frac{\left(\frac{4S-\sqrt{3}a^2}{3a}\right)^2+a^2}{4}$$

$$V=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a^2}{4}.\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a^2}{12}\sqrt{3.\frac{\left(\frac{4S-\sqrt{3}a^2}{3a}\right)^2+a^2}{4}-a^2}=\frac{a\sqrt{S(2S-\sqrt{3}a^2)}}{6\sqrt{6}}$$

$$V^2=\frac{a^2S(2S-\sqrt{3}a^2)}{216}=\frac{\sqrt{3}a^2(2S-\sqrt{3}a^2)S}{216\sqrt{3}}\le\frac{S}{216\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}a^2+2S-\sqrt{3}a^2}{2}\right)^2=\frac{S^2}{216\sqrt{3}}$$

Dấu "=" xảy ra: $\sqrt{3}a^2=2S-\sqrt{3}a^2\Leftrightarrow S=\sqrt{3}a\Rightarrow b=a\Rightarrow\frac{b}{a}=1$

Câu 6: **Chọn D**



Gọi O là giao của AC và BD.

Ta có $\Delta SBD = \Delta CBD$ nên $SO = CO$.

Trong tam giác ΔSAC có $SO = CO = \frac{1}{2}AC$ nên tam giác ΔSAC vuông tại A.

Suy ra $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 2$.

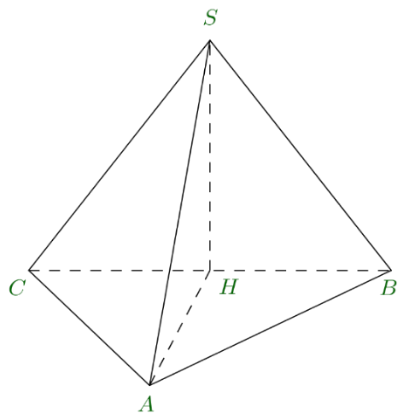
Diện tích đáy $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2.\frac{1}{2}BO.AC = 2\sqrt{2}$.

Do $SD = SB = SC = \sqrt{3}$ nên hình chiếu vuông góc H của S trên $\left(ABCD\right)$ thuộc cạnh AC.

Vì SH là đường cao của tam giác ΔSAC nên $SH = \frac{SA.SC}{\sqrt{SA^2 + SC^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 7: **Chọn A**



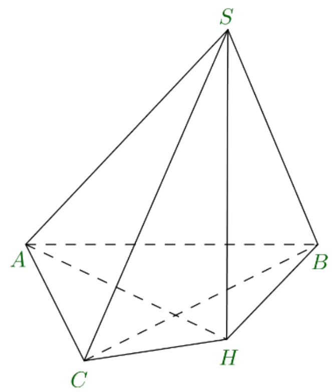
Trong tam giác ΔABC có $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{5}$.

Do $SA = SB = SC = \sqrt{3}$ nên hình chiếu vuông góc H của S trên $\left(ABC\right)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó H là trung điểm của BC.

Trong tam giác ΔSHB có $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{3 - \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{7}}{2}.\frac{1}{2}.2.1 = \frac{\sqrt{7}}{6}$.

Câu 8: **Chọn B**



Ta có diện tích đáy $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin BAC = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Trong tam giác ΔABC có

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔABC khi đó

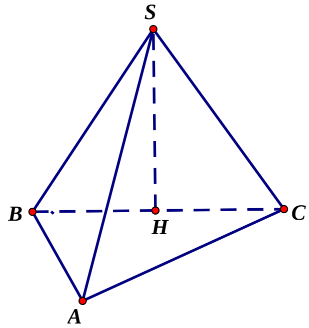
$R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$.

Do $SA = SB = SC = \sqrt{3}$ nên hình chiếu vuông góc của S trên $\left(ABC\right)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp H của tam giác ABC.

Trong tam giác ΔSBH có $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{4 - \left(\sqrt{2} + 1\right)} = \sqrt{3 - \sqrt{2}}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\sqrt{3-\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{6}$.

Câu 9: Chọn A



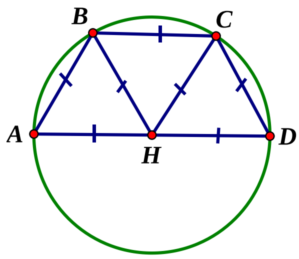
Gọi H là trung điểm của BC ta có: $AH\perp BC\Rightarrow AH\perp(ABC)$

Do $AS=AB=AC=a$ nên là H tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC. Do đó ΔSBC vuông tại S và

$$BC=\sqrt{SB^2+SC^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{15}}{3}\Rightarrow AH=\sqrt{a^2-\frac{5a^2}{12}}=a\sqrt{\frac{7}{12}}$$

Suy ra $V=\frac{1}{6}.a.\frac{a\sqrt{6}}{3}.a\sqrt{\frac{7}{12}}=\frac{a^3\sqrt{14}}{36}$.

Câu 10: Chọn C



Do $SA=SB=SC=2a$ suy ra hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng

Với giải thiết $ABCD$ là hình thang và $AB=BC=CD=a, AD=2a$ thì tứ giác $ABCD$ là hình thang cân và nội tiếp đường tròn tâm H có bán kính $R=a$.

Do đó chiều cao của khối chóp $h=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}, S_d=\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}\Rightarrow V=\frac{3a^2}{4}$.

Câu 11: Chọn A

Ta có: $S=a^2, h=b=6\sqrt{2}-4a\Rightarrow V=\frac{1}{3}S.h=\frac{a^2\left(6\sqrt{2}-4a\right)}{3}$.

Theo bất đẳng thức cô si ta có: $V=\frac{2}{3}.a.a.\left(3\sqrt{2}-2a\right)\le\frac{2}{3}\left(\frac{a+a+3\sqrt{2}-2a}{3}\right)^3=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi: $a=3\sqrt{2}-2a\Leftrightarrow a=\sqrt{2}\Rightarrow b=2\sqrt{2}$.

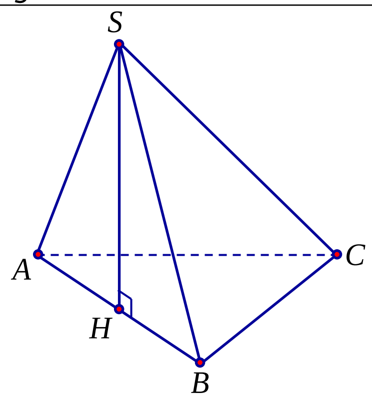
Câu 12: Chọn A

$SA=SB=SC=SD=\sqrt{3}a$ nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) bán kính R.

Do $AB=BC=CD=a, AD=2a$ nên $ABCD$ là nửa lục giác đều. Suy ra $R=a$.

$h^2=SA^2-R^2=2a^2\Rightarrow h=a\sqrt{2}$. $S_{ABCD}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$ suy ra $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}h.S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$

Câu 13: Chọn B



Giả sử đáy là tam giác vuông tại C. $SA = SB = SC = 1$ nên hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm của AB.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} \le \frac{1}{3}SH.HA^2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}.\sqrt{2SH^2.SA^2.SA^2}$.

Ta có: $2SH^2 + AH^2 + AH^2 = 2SH^2 + 2HA^2 = 2SA^2 = 2$

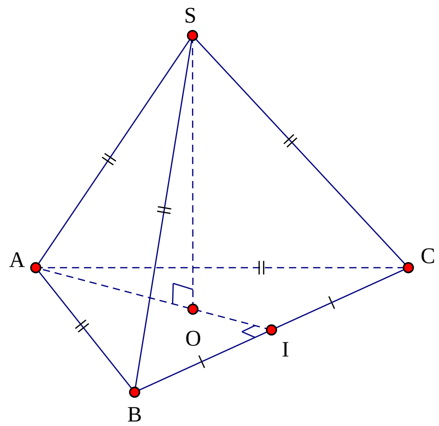
Vậy $2SH^2.SA^2.SA^2$ đạt GTLN khi $2SH^2 = HA^2 = HA^2 = \frac{2}{3}$

Vậy $V_{S.ABC}$ đạt GTLN khi tam giác ABC vuông cân và $HA^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \cos SAH = \frac{AH}{SA} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Câu 14: Chọn D

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp mặt đáy (ABC).

$SA = SB = SC$ nên $SO \perp (ABC)$.



$AI = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

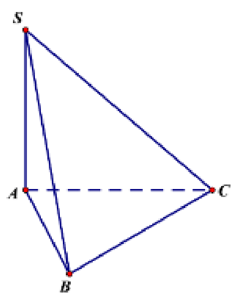
$AO = R = \frac{AC^2}{2AI} = \frac{4a^2}{a\sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{7}}a$

$\Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{16}{7}a^2} = \frac{\sqrt{35}}{7}a$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AI.BC = \frac{1}{2}.\frac{4}{\sqrt{7}}.3a^2 = \frac{6a^2}{\sqrt{7}}$.

Vậy thể tích khối chóp cần tìm là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SO.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{35}}{7}.\frac{6a^2}{\sqrt{7}} = \frac{2a^3\sqrt{5}}{7}$.

Câu 15: Chọn B

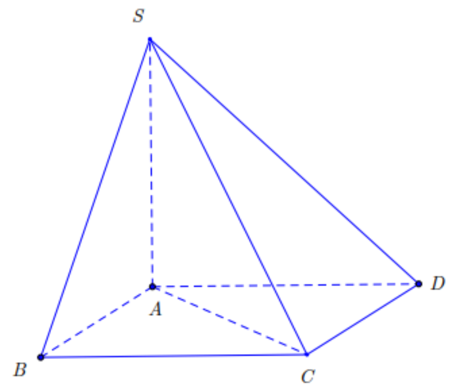


$(SB,(ABC)) = (SB, AB) = SBA = 30^\circ$.

$\Rightarrow SA = AB.\tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{12}$

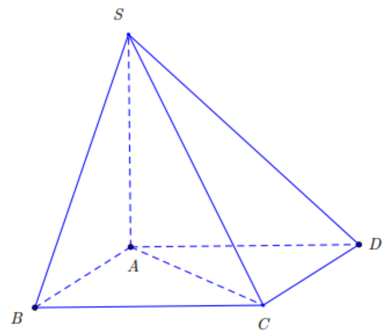
Câu 16: Chọn A



Vì đáy ABCD là hình thoi có $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow S_{ABCD} = 2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}\left(2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right).a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 17: Chọn B

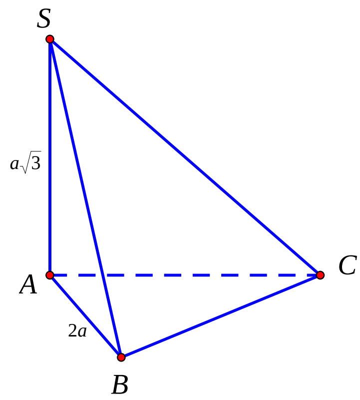


Vì $ABCD$ là hình vuông với $AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{a}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{a^2}{4}$.

$(SB,(ABCD)) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AB.\tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 18: Chọn A

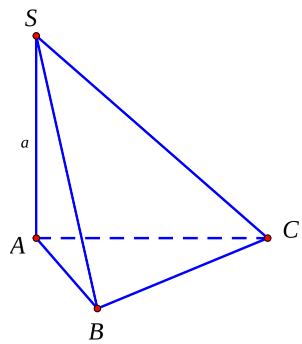


ΔABC vuông tại B : $BC = AB.\tan 60° = 2a\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = 2a^2\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.2a^2\sqrt{3} = 2a^3$.

Câu 19: Chọn C



ΔSAC vuông cân tại A : $AC = SA = a$

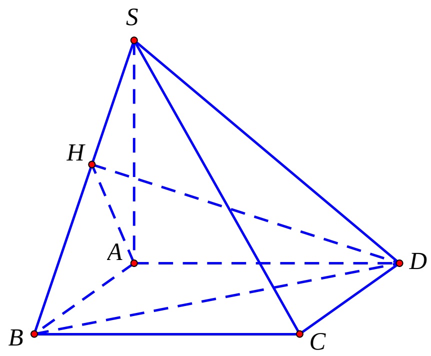
ΔABC vuông tại B và $\widehat{BAC} = 30°$

$$\begin{cases} BC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2} \\ AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Suy ra $V = V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. Vậy $\dfrac{V}{a^3} = \dfrac{\sqrt{3}}{24} \approx 0,072$.

Câu 20: Chọn C

Ta có: $\begin{cases}(SAB)\cap(SAD)=SA\\(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$.



Gọi H là hình chiếu của A trên $SB\Rightarrow AH\perp SB$.

Dễ thấy $AD\perp(SAB)\Rightarrow AD\perp SB$.

Do đó: $SB\perp(AHD)\Rightarrow SB\perp HD$.

Khi đó ta có:

$$\begin{cases}(SAB)\cap(SBD)=SB\\AH\perp SB;\ HD\perp SB\\AH\subset(SAB);\ HD\subset(SBD)\end{cases}\Rightarrow((SAB);(SBD))=AHD=45°.$$

Hay ΔAHD vuông cân tại $A\ \Rightarrow AH=AD=a$.

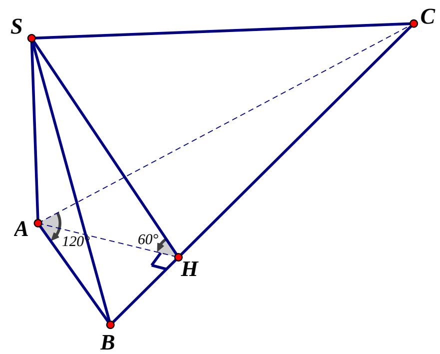
ΔSAB vuông tại A : $\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{AH^2}-\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{3}{4a^2}\Rightarrow SA=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $V=V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{2a}{\sqrt{3}}.2a^2=\dfrac{4a^3}{3\sqrt{3}}$. Vậy $\dfrac{V}{a^3}=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\approx 0{,}77$.

Câu 21: Chọn A

Tính cạnh

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A}=a\sqrt{7}$



Kẻ AH vuông góc BC tại H,

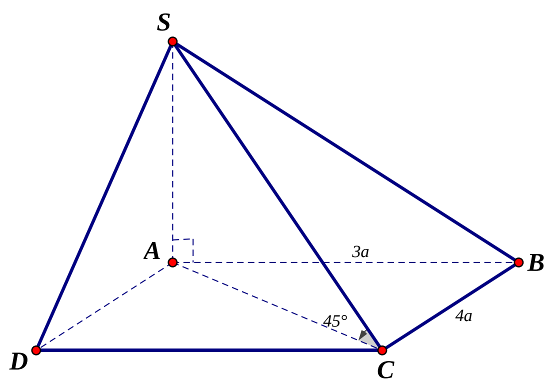
diện tích tam giác $\dfrac{AH.BC}{2}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A$

$\Leftrightarrow AH=\dfrac{AB.AC.\sin A}{BC}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Góc tạo bởi $mp(MBC)$ và $mp(ABC)$ là góc $SHA=60^0$.

Suy ra $SA=AH.\tan(60^0)=\dfrac{3a\sqrt{7}}{7}$. Vậy thể tích $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{21}}{14}$

Câu 22: Chọn A



Tính $AC=5a$ vì tam giác SAC suy ra $SA=5a$

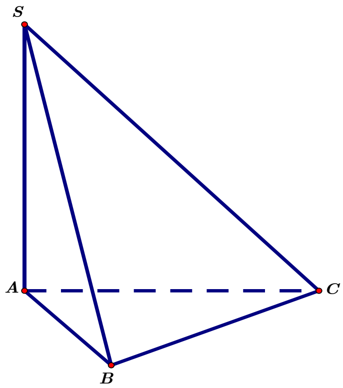
Tính thể tích $V=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=20a^3$

Câu 23: Chọn B

Ta có: ΔABC vuông tại $B \Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.BC=6a^2$.

$\Rightarrow V_{SABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.AD=\frac{1}{3}.6a^2.6a=12a^3$.

Câu 24: Chọn A



Ta có: ΔSBC vuông tại B; ΔABC vuông tại B.

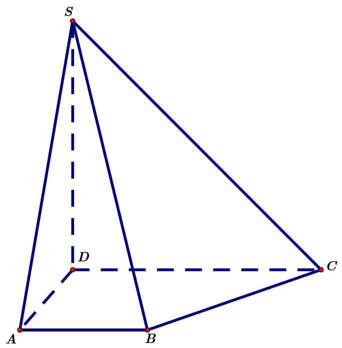
$SA=SB.\cos ASB=\frac{3a}{2}$

$AB=SB.\sin 30^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}; BC=SB=a\sqrt{3}$.

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.BC.SA$

$=\frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3}.\frac{3a}{2}=\frac{3a^3}{8}\Rightarrow\frac{a^3}{V}=\frac{8}{3}$.

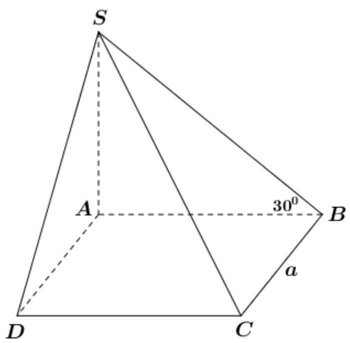
Câu 25: Chọn D



Ta có: $\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SD=\frac{1}{3}.\frac{(AB+CD).AD}{2}.SD=\frac{1}{3}.\frac{(a+3a).a}{2}.a\sqrt{3}=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 26: Chọn A

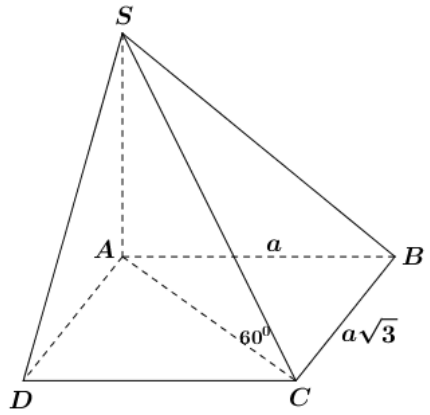
Ta có góc tạo bởi (SBC) và $(ABCD)$ là $SBA=30^0$.



Xét tam giác SAB vuông tại A ta có $SA=AB\tan SBA=a\tan 30^0=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}=V\Rightarrow\frac{3V}{a^3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 27: Chọn B



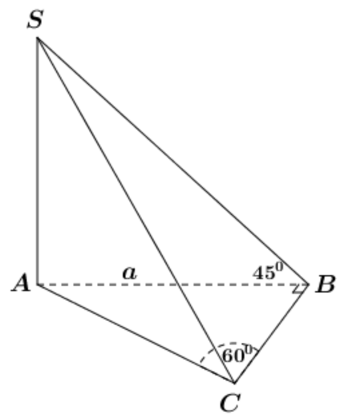
Xét tam giác ABC vuông tại B ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow AC = 2a$.

Góc tạo bởi SC và đáy là góc $SCA = 60^0$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $SA = AC\tan SCA = 2a\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}a.a\sqrt{3}.2a\sqrt{3} = 2a^3$.

Câu 28: Chọn B



Xét tam giác ABC vuông tại B ta có $BC = AB\cot BCA = a\cot 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$

Do tam giác SAB vuông cân tại A suy ra $SA = AB = a$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{6}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

Câu 29: Chọn D

Gọi H là trung điểm của AC $BH \perp AC; BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà: $\left.\begin{matrix} BH \perp AC \\ BH \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow BH \perp (ACD) \Rightarrow$ Hình chiếu của B xuống (DAC) là H.

Ta có: $BD \cap (DAC) = D \Rightarrow (BD;(DAC)) = (BD;DH) = BDH = 30^0$.

Xét tam giác BHD có: $\tan 30^0 = \frac{BH}{HD} \Rightarrow HD = \frac{BH}{\tan 30^0} = \frac{3a}{2}$.

Xét tam giác DAH có: $DA^2 = DH^2 - AH^2 = \frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow DA = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối tứ diện V_{ABCD} là: $V_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}. = \frac{a^2\sqrt{6}}{12}$. Tỷ số $\frac{a^3\sqrt{6}}{V} = \frac{a^3\sqrt{6}}{\frac{a^3\sqrt{6}}{12}} = 12$.

Câu 30: Chọn A

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có: $SC \subset (SAC)$.

Xét hai mặt phẳng (SAC) và $(AB'D')$ có: A là điểm chung thứ nhất.

Trong (SBD) có: $SO \cap B'D' = I$. Vậy $(SAC) \cap (AB'D') = AI \Rightarrow SC \cap (AB'D') = AI \cap SC = C'$

.

Thể tích khôi chóp $SABCD$: $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 30.20^3 = 4000\left(\text{cm}^3\right)$.

Ta có: $\frac{SC'}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{30^2}{30^2 + 20^2 + 20^2} = \frac{9}{17}$.

$\frac{SD'}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \frac{30^2}{30^2 + 20^2} = \frac{9}{13}$.

$\frac{V_{SAB'C'D'}}{V_{SABCD}} = \frac{2V_{SAC'D'}}{2V_{SACD}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SD'}{SD} => V_{SAB'C'D'} = \frac{9}{17} \cdot \frac{9}{13} \cdot V_{SABCD} = \frac{81}{221} \cdot 4000 \approx 1466\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 31: Chọn C

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

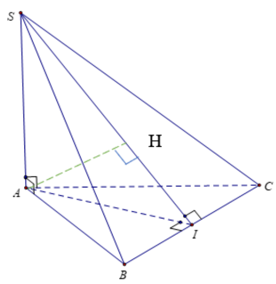
$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BC = \frac{1}{4} \cdot BC^2 = \frac{a^2}{2}$.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ AM \perp BC \\ SA \perp (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow (SBC;(ABCD)) = SMA = 45^0$.

Xét tam giác SAM có: $SA = AM.\tan SMA = AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối chóp là: $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Tỷ số: $\frac{6V}{a^3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 32: Chọn A



Gọi I là trung điểm BC. Vì chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy nên $(SAI) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SI. Kẻ $AH \perp SI \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow d(A,(SBC)) = AH = 3$. Giả sử $AB = 2x \Rightarrow AI = x\sqrt{3}$ .Trong tam giác vuông ΔSAI có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{9} - \frac{1}{3x^2} \Rightarrow SA = \frac{3x}{\sqrt{x^2-3}}$ (Điều kiện $x \in \left(\sqrt{3};+\infty\right)$)

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{x^3\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-3}}$$

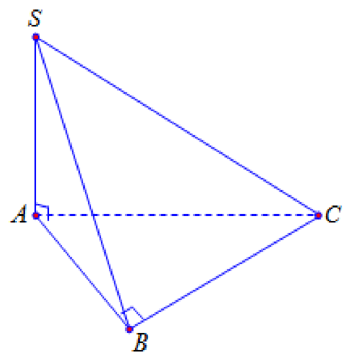
Xét hàm $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-3}} / \left(0;3\right)$ có $f'(x) = \frac{3x^2\sqrt{x^2-3} - \frac{x^4}{\sqrt{x^2-3}}}{x^2-3} = \frac{x^2(2x^2-9)}{\left(\sqrt{x^2-3}\right)^3}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$. Lập bảng biến thiên suy ra GTNN của hàm số đạt tại $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Khi đó ta có $cos\alpha = \frac{IH}{AI} = \frac{\sqrt{AI^2 - AH^2}}{AI} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 33: Chọn A

Vì M điểm trong của khối chóp cách đều tất cả các mặt của khối chóp một đoạn bằng h nên M là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp, bán kính mặt cầu là $r = h$.



Mặt khác mặt cầu bán kính r nội tiếp hình chóp thì thể tích khối chóp là:

$V = \frac{1}{3}.S.r$ trong đó S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình chóp.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10;$

$SB = \sqrt{AB^2 + SB^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

Vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

$$S = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}.AB.BC + \frac{1}{2}.SA.AB + \frac{1}{2}.SB.BC + \frac{1}{2}.SA.AC = 108$$

$$V = \frac{1}{3}.S.r = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.6.24 = 48 \Rightarrow r = h = \frac{3V}{S} = \frac{3.48}{108} = \frac{4}{3}.$$

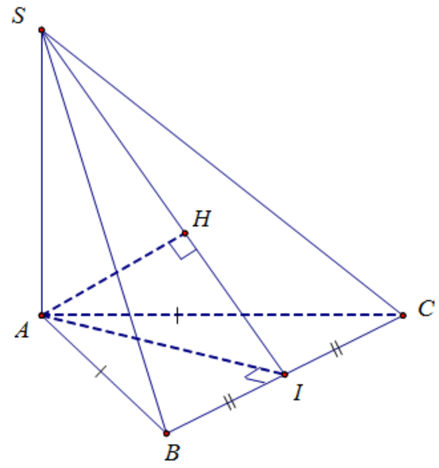
Câu 34: Chọn C

Vì điểm M thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và cách đều tất cả các mặt của khối chóp nên M là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp, bán kính mặt cầu là r .

Theo câu 31 ta có $r = h = \frac{4}{3}$.

$$\Rightarrow V_{M.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.h = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.8.6.\frac{4}{3} = \frac{32}{3}.$$

Câu 35: Chọn A



Vì ΔABC là tam giác vuông cân tại $A, AB = 2a,$ nên $BC = 2\sqrt{2}a$

Gọi I là trung điểm BC suy ra $AI = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{2}.$

Khi đó $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI).$

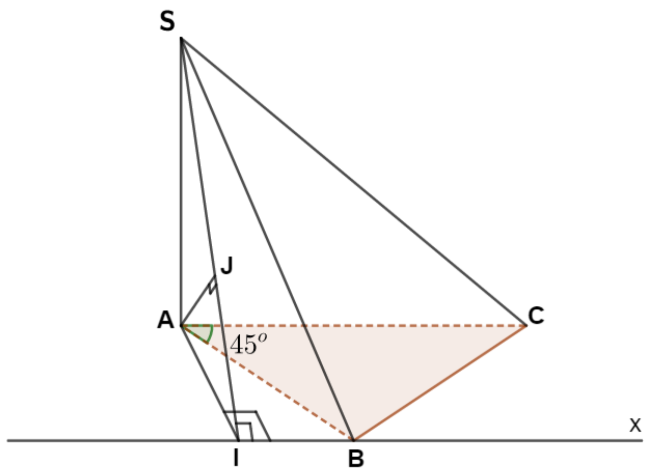
Goi H là hình chiếu của A lên SI suy ra AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

$\Rightarrow AH = \frac{4a}{3}$. Ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow SA = \sqrt{\frac{AI^2.AH^2}{AI^2 - AH^2}} = 4a.$$

Mặt khác $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}2a.2a = 2a^2. \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \frac{1}{3}.2a^2.4a = \frac{8a^3}{3}.$

Câu 36: Chọn D



Kẻ $Bx // AC \Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (SBx)) = d(A, (SBx))$.

Dựng $AI \perp Bx$ tại I, $AJ \perp SI$ tại $J \Rightarrow d(AC, SB) = d(A, (SBx)) = AJ = \frac{4a}{3}$.

Tam giác AIB vuông cân tại $I \Rightarrow AI = \frac{AB}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAI vuông tại $A \Rightarrow \frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow SA = \frac{AI.AJ}{\sqrt{AI^2 - AJ^2}} = 4a$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}.2a.2a.\sin 45^\circ = a^2\sqrt{2}$.

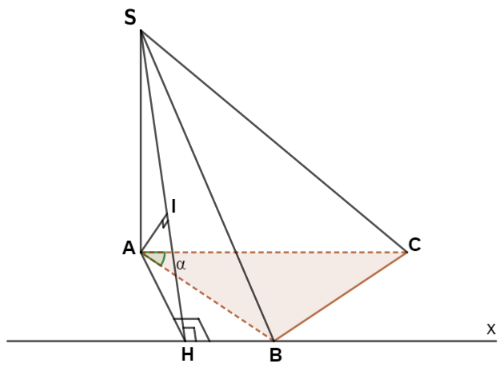
$\Rightarrow$ Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}.a^2\sqrt{2}.4a = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 37: Chọn D

Kẻ $Bx//AC \Rightarrow d\left(AC,SB\right)=d\left(AC,(SBx)\right)=d\left(A,(SBx)\right)$.

Dựng $AH\perp Bx$ tại H, $AI\perp SH$ tại I

$\Rightarrow d\left(AC,SB\right)=d\left(A,(SBx)\right)=AI=3$.



Tam giác AHB vuông tại H

$\Rightarrow AH=AB.\sin\alpha=6.\sin\alpha$.

Tam giác SAH vuông tại A

$\Rightarrow \dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{AI^2}-\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{36\sin^2\alpha}=\dfrac{4\sin^2\alpha-1}{36\sin^2\alpha}$.

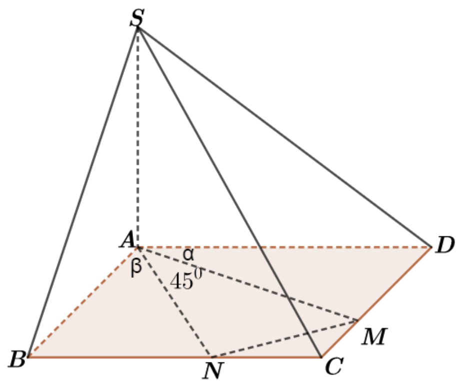
$\Rightarrow SA=\dfrac{6\sin\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha-1}}$.

Thể tích khối chóp $V=\dfrac{1}{3}.SA.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{6\sin\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha-1}}.\dfrac{1}{2}.6.6.\sin\alpha=\dfrac{36\sin^2\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha-1}}$.

Ta có $V=\dfrac{36\sin^2\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha-1}}=\dfrac{9\left(4\sin^2\alpha-1\right)+9}{\sqrt{4\sin^2\alpha-1}}=9\left[\sqrt{4\sin^2\alpha-1}+\dfrac{1}{\sqrt{4\sin^2\alpha-1}}\right]\geq 18$.

$\Rightarrow \min V=18$ xảy ra khi $4\sin^2\alpha-1=1\Leftrightarrow \sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 38: Chọn B



Thể tích khối chóp $S.AMN$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ Diện tích tam giác AMN nhỏ nhất.

Gọi $DM=x$, $BN=y$ $\left(0<x,y<1\right)$.

Khi đó ta có $\begin{cases}\tan\alpha=\tan DAM=x\\ \tan\beta=\tan BAN=y\end{cases}$.

$\Rightarrow \tan\left(\alpha+\beta\right)=\tan 45°=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}\Leftrightarrow 1=\dfrac{x+y}{1-xy}$

$\Rightarrow x+y=1-xy\geq 2\sqrt{xy}$ (1).

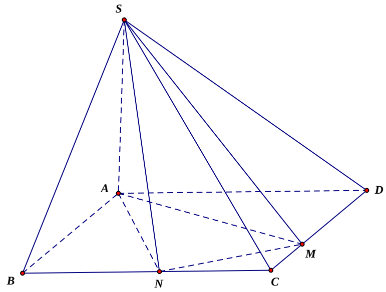
Đặt $t=\sqrt{xy}$ $\left(0<t<1\right)$. (1)$\Rightarrow t^2+2t-1\leq 0\Leftrightarrow -\sqrt{2}-1\leq t\leq\sqrt{2}-1$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow 0\leq t\leq\sqrt{2}-1\Rightarrow 0\leq xy\leq 3-2\sqrt{2}$.

$S_{AMN}=S_{ABCD}-\left(S_{ADM}+S_{ABN}+S_{CMN}\right)=1-\left[\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}\left(1-x\right)\left(1-y\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(1-xy\right)\geq\sqrt{2}-1$.

Vậy $V_{S.AMN}=\dfrac{1}{3}S_{AMN}.SA=\dfrac{1}{3}.S_{AMN}\geq\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}\Rightarrow \min V=\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$.

Câu 39: Chọn A



Đặt $DM = x, BN = y$ với $0 < x, y < 1$. Khi đó $AM = \sqrt{x^2+1}, AN = \sqrt{y^2+1}$.

Ta có $V_{S.AMN} = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta AMN} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AM.AN.\sin 30^\circ = \frac{1}{12}.AM.AN$.

Ta có $\tan 60^\circ = \tan\left(DAM + BAN\right) = \frac{\tan DAM + \tan BAN}{1 - \tan DAM.\tan BAN} = \frac{x+y}{1-xy}$

Suy ra $\sqrt{3}(1-xy) = x+y \Leftrightarrow y\left(1+\sqrt{3}x\right) = \sqrt{3}-x \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}-x}{1+\sqrt{3}x}$.

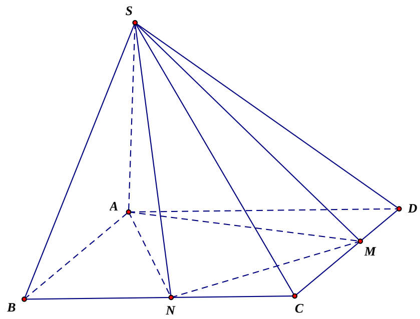
Do đó $AN = \sqrt{y^2+1} = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}x+x^2+1+2\sqrt{3}x+3x^2}{\left(1+\sqrt{3}x\right)^2}} = \frac{2\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{3}x}$.

Suy ra $V_{S.AMN} = \frac{1}{12}.AM.AN = \frac{x^2+1}{6\left(1+\sqrt{3}x\right)} = f(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{6}.\frac{2x.\left(1+\sqrt{3}x\right) - \sqrt{3}\left(x^2+1\right)}{\left(1+\sqrt{3}x\right)^2} = \frac{\sqrt{3}x^2+2x-\sqrt{3}}{6\left(1+\sqrt{3}x\right)^2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{3}}\ (TM) \\ x = -\sqrt{3}\ (L) \end{array}\right.$$

Suy ra $\underset{(0;1)}{\text{Min}}\, f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9}$.

Câu 40: Chọn C



Đặt $DM = x, BN = y$ với $0 < x, y < 1$.

Khi đó $AM = \sqrt{x^2+1}, AN = \sqrt{y^2+1}$.

Ta có

$V_{S.AMN} = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta AMN} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AM.AN.\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{12}.AM.AN$.

Ta có $\tan 30^\circ = \tan\left(DAM + BAN\right) = \frac{\tan DAM + \tan BAN}{1 - \tan DAM.\tan BAN} = \frac{x+y}{1-xy}$

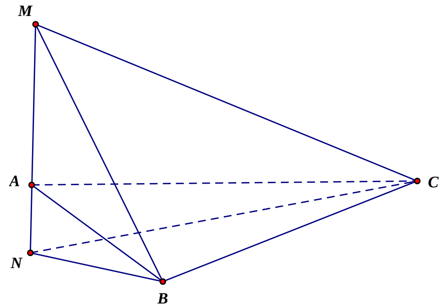
Suy ra $1 - xy = \sqrt{3}(x+y) \Leftrightarrow y = \frac{1-\sqrt{3}x}{x+\sqrt{3}}$. Do đó $AN = \sqrt{y^2+1} = \frac{2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{3}+x}$.

Suy ra $V_{S.AMN} = \frac{\sqrt{3}}{12}.AM.AN = \frac{\sqrt{3}\left(x^2+1\right)}{6\left(\sqrt{3}+x\right)} = f(x)$.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{6}.\frac{2x.\left(\sqrt{3}+x\right)-\left(x^2+1\right)}{\left(\sqrt{3}+x\right)^2}=\frac{x^2+2\sqrt{3}x-1}{6\left(1+\sqrt{3}x\right)^2}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{3}+2\left(TM\right)\\x=-\sqrt{3}-2\left(L\right)\end{array}\right.$$

Suy ra $\underset{(0;1)}{\text{Min}}\, f\left(x\right)=f\left(-\sqrt{3}+2\right)=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$.

Câu 41: Chọn D

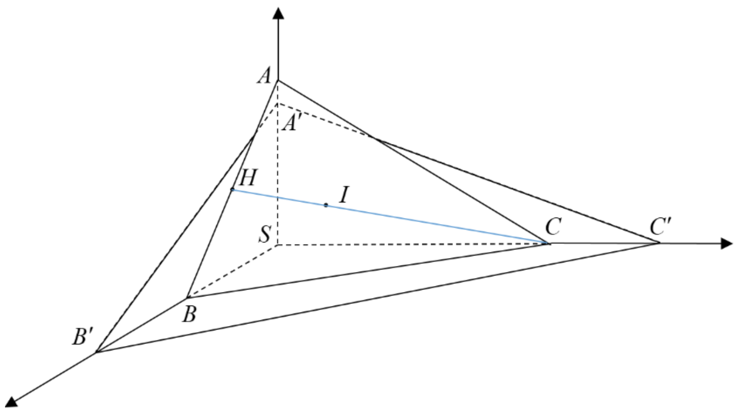


Ta có tam giác ABC vuông cân tại B, $AC=2$ nên $AB=BC=\sqrt{2}$.

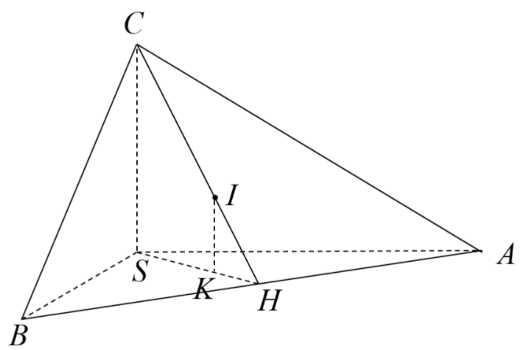
$V_{MNBC}=V_{M.ABC}+V_{N.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\left(AM.AB.BC+AN.AB.BC\right)=\frac{1}{3}\left(AM+AN\right)$

$\geq\frac{2}{3}\sqrt{AM.AN}=\frac{2}{3}$, dấu bằng khi $AM=AN=1$.

Câu 42: Chọn C



Gọi $SA'=a$, $SB'=b$, $SC'=c$. Ta thấy $V_{S.A'B'C'}=\frac{1}{6}abc$.



Xét tứ diện $SABC$ như hình vẽ. Gọi H là trung điểm của AB. Ta thấy $CA=CB=3$, $AB=2$ và $CH=\sqrt{CB^2-BH^2}=\sqrt{3^2-1}=2\sqrt{2}$. Vậy tam giác ABC là tam giác cân tại C, suy ra điểm I thuộc vào đường cao CH của tam giác CAB, đồng thời $S_{ABC}=\frac{1}{2}CH.AB=2\sqrt{2}$.

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ($r = IH$). Ta có $IH = r = \frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} = \frac{2\sqrt{2}}{(3+3+2)/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Từ đây $\frac{IK}{SC} = \frac{IH}{CH} \Rightarrow IK = \frac{SC.IH}{CH} = \frac{\sqrt{7}.\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ I đến các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SAC). Dễ thấy $y = z$, $x = IK = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Đồng thời

$V_{S.ABC} = V_{I.SAB} + V_{I.SAC} + V_{I.SBC} \Leftrightarrow \frac{1}{6}\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{7} = \frac{1}{3}x.S_{SAB} + \frac{1}{3}y.S_{SBC} + \frac{1}{3}z.S_{SCA}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{7}}{4}.1 + \frac{1}{3}.y.\frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{1}{3}.z.\frac{\sqrt{14}}{2} \Leftrightarrow y = z = \frac{3\sqrt{2}}{8}$

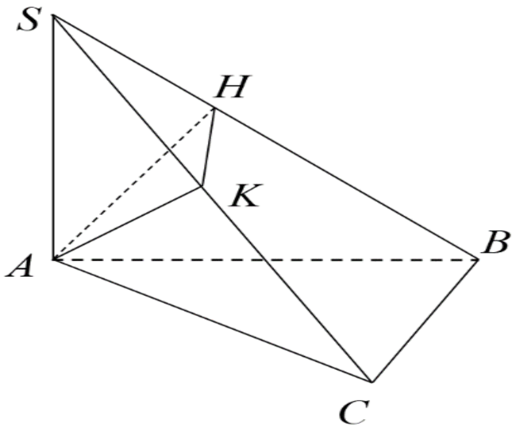
Xét tứ diện $S.A'B'C'$, ta thấy $V_{S.A'B'C'} = V_{I.SA'B'} + V_{I.SA'C'} + V_{I.SB'C'}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{6}abc = \frac{1}{3}x.\frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}y.\frac{1}{2}bc + \frac{1}{3}z.\frac{1}{2}ca \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Theo bất đẳng thức Cauchy cho 3 số, ta có

$1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xyz}{abc}} \Rightarrow abc \geq 27xyz = \frac{243\sqrt{7}}{128}$. Từ đó $V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{6}abc \geq \frac{81\sqrt{7}}{256}$

Câu 43: Chọn A



Ta chứng minh được $BC \perp (SAC)$, từ đó $\begin{cases} AK \perp SC \\ AK \perp BC \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp KH$.

Đồng thời $\begin{cases} AH \perp SB \\ AK \perp SB \quad (\text{do } AK \perp (SBC)) \end{cases} \Rightarrow SB \perp (AHK)$

Vậy ta nhận thấy hình chóp $S.AHK$ có $SH \perp (AHK)$ và tam giác AHK vuông tại K.

Gọi độ dài đoạn $AC = x$ (với $0 < x < 2a$ vì tam giác ABC vuông tại C với $AB = 2a$). Xét tam giác vuông cân SAB ta có đường cao $AH = SH = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông SAC ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 4a^2}{4a^2x^2}$. Khi đó $AK = \frac{2ax}{\sqrt{4a^2 + x^2}}$. Suy ra $HK = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{4a^2x^2}{4a^2 + x^2}} = a\sqrt{\frac{2(4a^2 - x^2)}{4a^2 + x^2}}$

Vậy thể tích

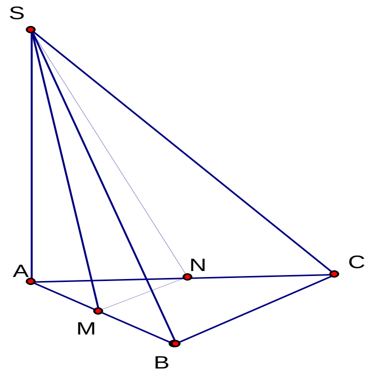
$$V_{S.AHK}=\frac{1}{3}SH.S_{AHK}=\frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}AK.KH=\frac{1}{6}a\sqrt{2}.\frac{2ax}{\sqrt{4a^2+x^2}}.a\sqrt{\frac{2\left(4a^2-x^2\right)}{4a^2+x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3\frac{\left(\sqrt{2}x\right)\sqrt{4a^2-x^2}}{4a^2+x^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho $\sqrt{2}x$ và $\sqrt{4a^2-x^2}$ ta có

$$\left(\sqrt{2}x\right)\sqrt{4a^2-x^2}\le\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^2+\sqrt{4a^2-x^2}^2}{2}=\frac{4a^2+x^2}{2}$$

Từ đó suy ra $V_{S.AHK}=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3\frac{\left(\sqrt{2}x\right)\sqrt{4a^2-x^2}}{4a^2+x^2}\le\frac{\sqrt{2}}{3}a^3\frac{4a^2+x^2}{2\left(4a^2+x^2\right)}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 44: Chọn C

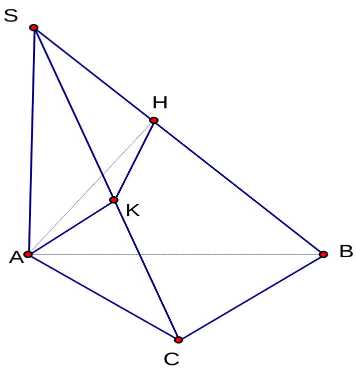


Ta có tam giác ABC vuông tại B nên $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.BC=\frac{1}{2}.2a.2a=2a^2$.

Mặt khác theo giả thiết ta có $\left(\left(SBC\right),\left(ABC\right)\right)=\left(SB,AB\right)=SBA=60^0$. Do đó $SA=AB.\tan 60^0=2a\sqrt{3}$. Nên $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.SA.S_{ABC}=\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Ta có $V_{S.BCMN}=\frac{3}{4}V_{S.ABC}=\sqrt{3}a^3$.

Câu 45: Chọn A



Kẻ $AH\perp SB,\left(H\in SB\right),AK\perp SC\left(K\in SC\right)\Rightarrow SB\perp\left(AHK\right)\Rightarrow AHK=60^0$.

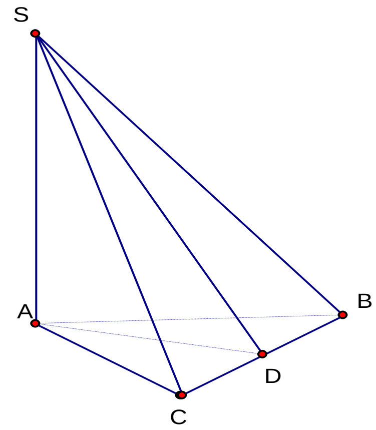
Ta có $AC=AB\sin\alpha=2R\sin\alpha,BC=AB\cos\alpha=2R\cos\alpha\Rightarrow S_{ABC}=2R^2\sin\alpha\cos\alpha$.

Ta lại có $\frac{AK}{AH}=\sin AHK=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 2AK=\sqrt{3}AH\Rightarrow\frac{3}{AK^2}=\frac{4}{AH^2}$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{4R^2\sin^2\alpha}\right)=4\left(\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{4R^2}\right)\Rightarrow SA=\frac{2R\sin\alpha}{\sqrt{3-4\sin^2\alpha}}.$$

Do đó $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{ABC}=\frac{4R^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{3\sqrt{3-4\sin^2\alpha}}=\frac{R^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 46: Chọn A



Ta có $\left(SB,\left(ABC\right)\right)=SBA=\alpha$.

Mặt khác ta có $\begin{cases}BD\perp AD\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp\left(SAD\right)\Rightarrow\left(SB,\left(SAD\right)\right)=BSD=\beta.$

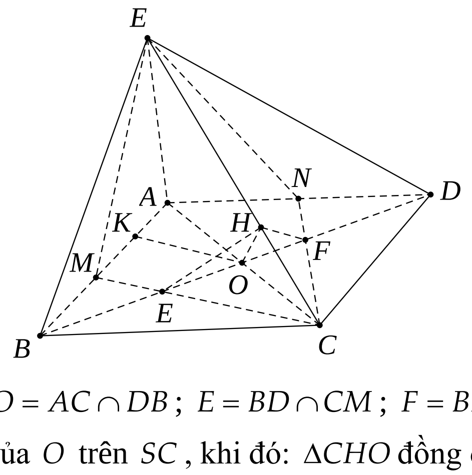
Giả sử $BD=x(x>0)$. Khi đó ta có $\sin\beta=\frac{x}{SB}\Rightarrow SB=\frac{x}{\sin\beta}$.

Mặt khác ta có $\cos\alpha=\frac{AB}{SB}\Rightarrow AB=\frac{x\cos\alpha}{\sin\beta},SA=\frac{x\sin\alpha}{\sin\beta}$.

Ta lại có $AB=\sqrt{x^2+a^2}\Leftrightarrow x^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}-1\right)=a^2\Leftrightarrow x=\frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}$.

Do đó $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.AD.BD=\frac{1}{3}\frac{x\sin\alpha}{\sin\beta}.a.\frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}=\frac{a^3\sin\alpha\sin\beta}{3\left(\cos^2\alpha-\sin^2\beta\right)}$.

Câu 47: Chọn A



Đặt $AM=x$, $AN=y$. Gọi $O=AC\cap DB$; $E=BD\cap CM$; $F=BD\cap CN$.

H là hình chiếu vuông góc của O trên SC, khi đó: ΔCHO đồng dạng ΔCAS

$\Rightarrow\frac{HO}{SA}=\frac{CO}{SC}\Rightarrow HO=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ta có: $\begin{cases}BD\perp SA\\BD\perp AC\end{cases}\Rightarrow BD\perp\left(SAC\right)$

Lại có: $\begin{cases} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HBD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HE \\ SC \perp HF \end{cases}$.

Do đó góc giữa (SCM) và (SCN) bằng góc giữa HE và HF. Suy ra $HE \perp HF$.

Mặt khác $S_{AMCN} = S_{\Delta ACN} + S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2}CB.AM + \frac{1}{2}CD.AN = x + y$

$\Rightarrow V_{S.AMCN} = \frac{1}{3}SA.S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y)$.

Ta có: $x > 0$, $y > 0$ và nếu $x \neq 2$, $y \neq 2$ thì gọi K là trung điểm của AM, khi đó $KO//MC$ nên $\frac{OE}{EB} = \frac{KM}{MB} = \frac{x}{4-2x} \Rightarrow \frac{OE}{x} = \frac{EB}{4-2x} = \frac{OB}{4-x} \Rightarrow OE = \frac{x\sqrt{2}}{4-x}$.

Tương tự: $OF = \frac{y\sqrt{2}}{4-y}$. Mà $OE.OF = OH^2 \Rightarrow \frac{2xy}{(4-x)(4-y)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12$

Nếu $x = 2$ hoặc $y = 2$ thì ta cũng có $OE.OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12$.

Tóm lại: $(x+2)(y+2) = 12 \Leftrightarrow y = \frac{8-2x}{x+2}$, do $y \leq 2$ nên $\frac{8-2x}{x+2} \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Do đó $V_{S.AMCD} = \frac{1}{3}SA.S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y) = \frac{2}{3}\left(x + \frac{8-2x}{x+2}\right) = \frac{2}{3}\frac{x^2+8}{x+2}$.

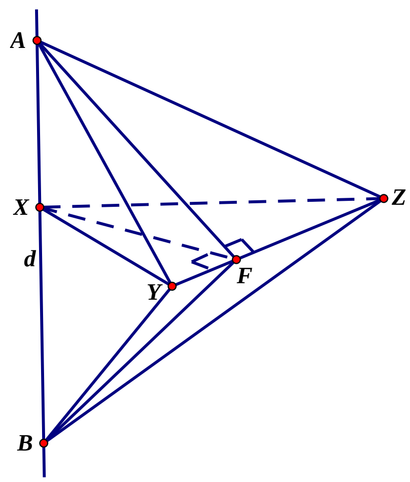
Xét $f(x) = \frac{2}{3}\frac{x^2+8}{x+2}$ với $x \in [1;2]$, $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}\right)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + 2\sqrt{3}$; $x = -2 - 2\sqrt{3}$ (loại).

Lập BBT ta suy ra $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = f(2) = 2$.

Vậy $\max V_{S.AMCN} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}$.

Câu 48: Chọn D



Thể tích khối tứ diện $ABYZ$ là $V = \frac{1}{3}AB.S_{\Delta XYZ}$.

Do diện tích tam giác XYZ không đổi nên thể tích tứ diện $ABYZ$ là nhỏ nhất khi AB ngắn nhất.

Dựng $XF \perp YZ$, do $YZ \perp AB$ nên $YZ \perp (ABF)$, suy ra $\left((AYZ),(BYZ)\right) = \left(FA, FB\right) = AFB = 90°$.

Xét tam giác vuông ABF có FX là đường cao không đổi (Do XF là đường cao của ΔXYZ cố định) nên $XF^2 = XA.XB$ không đổi.

Có $AB = XA + XB \geq 2\sqrt{XA.XB} = 2XF$ không đổi. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $XA = XB$.

Vậy thể tích khối tứ diện $ABYZ$ nhỏ nhất khi X là trung điểm AB hay $XA = XB$

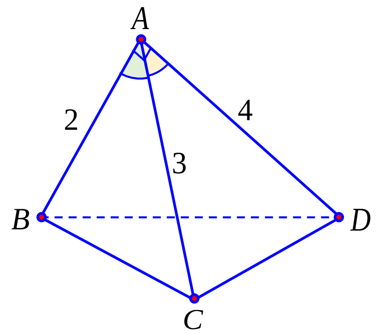
Câu 49: Chọn A

Do $AB^2 + AD^2 = BD^2 \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại A; $AC^2 + AD^2 = CD^2 \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại A.

Lại có $\cos BAC = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = \dfrac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2.2.3} = -\dfrac{1}{4}$

Sử dụng công thức giải nhanh: Cho chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và $ASB = \alpha$, $BSC = \beta$, $ASC = \gamma$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

$$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6}\sqrt{1 - cos^2\alpha - cos^2\beta - cos^2\gamma + 2cos\alpha.cos\beta.cos\gamma}.$$



Áp dụng: Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là

$$V_{ABCD} = \frac{2.3.4}{6}\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \cos^2 90° - \cos^2 90° + 2.\left(-\frac{1}{4}\right).\cos 90°.\cos 90°} = \sqrt{15}.$$

Câu 50: Chọn A

Ta có: $V_{MNBC} = \dfrac{1}{3}.\text{MN}.\text{S}_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{12}.MN$

Gọi D là trung điểm cạnh BC ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp MN \end{cases} \Rightarrow BC \perp (MDN) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp DM \\ BC \perp DN \end{cases}$

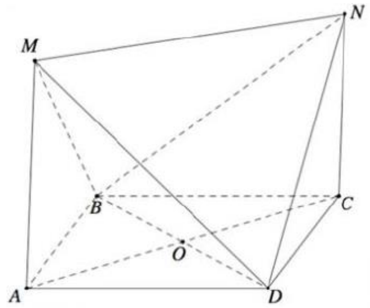
Do đó $\left((MBC),(NBC)\right) = \left(DM, DN\right) = 90^0 \Leftrightarrow DM \perp DN \Leftrightarrow AM.AN = AD^2 = \dfrac{3a^2}{4}$

Khi đó theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$MN = AM + AN \geq 2\sqrt{AM.AN} = \sqrt{3}a$

Vì vậy $V_{MNBC} \geq \dfrac{\sqrt{3}a^2}{12}.MN = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{12}.\sqrt{3}a = \dfrac{a^3}{4}$

Câu 51: Chọn D



Ta có :

$$V_{BDMN}=\frac{2S_{MBD}\times S_{NBD}\times\sin\left(\left(MBD\right),\left(NBD\right)\right)}{3BD}=\frac{2S_{MBD}\times S_{NBD}}{3\sqrt{a^2+b^2}}$$

Trong đó $BD=\sqrt{a^2+b^2}$

Và $\sin\left(\left(MBD\right),\left(NBD\right)\right)=\sin 90^0=1$

Đặt $AM=x, CN=y$

Ta có $\left(\left(MBD\right),\left(ABCD\right)\right)+\left(\left(NBD\right),\left(ABCD\right)\right)+\left(\left(MBD\right),\left(NBD\right)\right)=180^0$

Do đó $\left(\left(MBD\right),\left(ABCD\right)\right)+\left(\left(NBD\right),\left(ABCD\right)\right)=90^0$

$\Leftrightarrow \sin\left(\left(MBD\right),\left(ABCD\right)\right)=cos\left(\left(NBD\right),\left(ABCD\right)\right)$

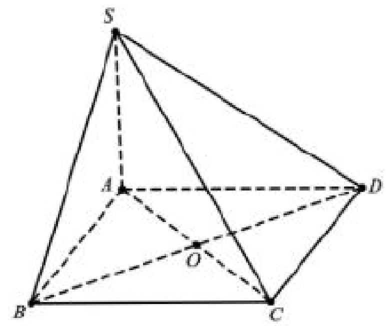
$$\Leftrightarrow \sqrt{a-\left(\frac{S_{ABD}}{S_{MBD}}\right)^2}=\frac{S_{ABD}}{S_{NBD}}\Leftrightarrow \frac{1}{S_{MBD}^2}+\frac{1}{S_{NBD}^2}=\frac{1}{S_{ABD}^2}=\frac{4}{a^2b^2}$$

Theo định lý diện tích hình chiếu ta có $cos\left(\left(MBD\right),\left(ABCD\right)\right)=\dfrac{S_{ABD}}{S_{MBD}}$ và $cos\left(\left(NBD\right),\left(ABCD\right)\right)=\dfrac{S_{ABD}}{S_{NBD}}$. Theo BĐT AM- GM ta có:

$$\frac{4}{a^2b^2}=\frac{1}{S_{MBD}^2}+\frac{1}{S_{NBD}^2}\geq 2\sqrt{\frac{1}{S_{MBD}^2}.\frac{1}{S_{NBD}^2}}=\frac{2}{S_{MBD}.S_{NBD}}\Rightarrow S_{MBD}.S_{NBD}\geq\frac{1}{2}a^2b^2$$

. Vậy $V_{BDMN}\geq\dfrac{a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$

Câu 52: Chọn A



Đặt $SD=h$, ta có

$BD=\sqrt{AD^2+AB^2-2AB.AD.\cos 60^0}=\sqrt{3}a$

Suy ra $SB=\sqrt{SD^2+BD^2}=\sqrt{h^2+3a^2}$

Ta có $d\left(B;\left(SAC\right)\right)=d\left(D;\left(SAC\right)\right)$

và

$$\frac{1}{d^2\left(D;\left(SAC\right)\right)}=\frac{1}{SD^2}+\frac{1}{d^2\left(D;AC\right)}=\frac{1}{h^2}+\frac{AC^2}{4S_{DAC}^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{7}{3a^2}$$

$\Rightarrow d\left(D;\left(SAC\right)\right)=\dfrac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2+7h^2}}$ (Do $AC^2=7a^2; S_{DAC}=\dfrac{1}{2}a.2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$)

Do đó $\sin\left(\text{SB};\left(SAC\right)\right)=\dfrac{d\left(B;\left(SAC\right)\right)}{SB}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2+7h^2}}}{\sqrt{h^2+3a^2}}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow h=a\sqrt{3}$

Vậy $V_{S.ABCD}=a^3$

DẠNG 3 Thể tích khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

- Với các khối chóp có giả thiết mặt phẳng vuông góc với đáy ta sử dụng các định lý về gioa tuyến dưới đây:
- Hai mặt phẳng cùng vuông góc với đáy thì đoạn giao tuyến của chúng vuông góc với đáy. Tính chất này dựa trên định lí về giao tuyến của hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

  Kí hiệu: $\begin{cases}(P)\perp(R)\\(Q)\perp(R)\\(P)\cap(Q)=a\end{cases}\Rightarrow a\perp(R)$
- Mặt bên nào vuông góc với đáy thì đường cao của mặt bên đó vuông góc với đáy. Tính chất này dựa trên định lý sau: $\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=a\\d\subset(P),d\perp a\end{cases}\Rightarrow d\perp(Q)$

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V=\frac{a^3}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3}{4}$.

Câu 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{a^3}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V=\frac{a^3}{2}$.

Câu 3. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, mặt bên (SAD) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 4. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAD) là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\frac{3a^3}{2}$. **D.** $V=\frac{a^3}{2}$.

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $h=\frac{2}{3}a$. **B.** $h=\frac{4}{3}a$. **C.** $h=\frac{8}{3}a$. **D.** $h=\frac{3}{4}a$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với đáy. Biết khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{4a}{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{2a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{8a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{4a^3}{3}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đáy là hình vuông cạnh bằng a. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với đáy, biết $SC=\frac{3a}{2}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3}{9}$. **C.** $SH\perp MN(H\in MN)$. **D.** $V=\frac{2a^3}{9}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB=a; AD=a\sqrt{3}$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với đáy, biết $SC=2a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\frac{9a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $AC=a; BD=a\sqrt{3}$. Tam giác SAB là tam giác đều và mặt bên (SAB) vuông góc với đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{3a^3}{4}$. **B.** $V=\frac{a^3}{2}$. **C.** $V=\frac{a^3}{4}$. **D.** $V=\frac{3a^3}{2}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $AC=a; BD=a\sqrt{3}$. Tam giác SAB là tam giác vuông cân tại S và mặt bên (SAB) vuông góc với đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11. Trong các khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với đáy, $SC=2\sqrt{3}$. Khối chóp có thể tích lớn nhất là

A. $\frac{4\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\frac{64}{15}$. **C.** $\frac{4\sqrt{10}}{15}$. **D.** $\frac{64}{5}$.

Câu 12. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, tam giác SAB vuông cân tại , tam giác SCD đều. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $SC=\frac{a\sqrt{26}}{2}$, tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{2a^3}{3}$. **B.** $V=4a^3$. **C.** $V=\frac{4a^3}{3}$. **D.** $V=2a^3$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=4, SC=6$ và mặt bên (SAD) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{40}{3}$. **B.** 40. **C.** 80. **D.** $\frac{80}{3}$.

Câu 15. Trong các khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=2\sqrt{3}$, tam giác SAB vuông cân tại S, tam giác SCD đều. Khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất bằng

A. 6. **B.** $6\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $6\sqrt{2}$.

Câu 16. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=a, AD=\sqrt{3}a$. Gọi H là trung điểm của cạnh AB, các mặt phẳng $(SHC),(SHD)$ cùng vuông góc với đáy và SD tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{13}}{2}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{13}}{3}$. **C.** $V=\frac{3a^3\sqrt{13}}{2}$. **D.** $V=\frac{5a^3\sqrt{13}}{2}$.

Câu 17. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAB cân tại S, mặt bên (SAB) vuông góc với đáy và SC tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=a^3$. **B.** $V=\sqrt{3}a^3$. **C.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3}{3}$.

Câu 18. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=SB=AB=AC=a$, $SC=\frac{a\sqrt{6}}{3}$ và mặt phẳng (SBC) vuông góc với (ABC). Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{36}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{14}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{21}}{36}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{21}}{12}$.

Câu 19. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=SB=AB=AC=a$, $SC=x$ và mặt phẳng (SBC) vuông góc với (ABC). Tìm x để thể tích V của khối chóp đã cho lớn nhất.

A. $x=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $x=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 20. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi và góc tạo bởi các mặt bên (SAB), (SBC), (SCD), (SDA) và mặt đáy tương ứng là $90°, 60°, 60°, 60°$. Biết tam giác SAB vuông cân tại S có $AB=a$, chu vi tứ giác $ABCD$ bằng $9a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 21. Cho khối tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC đều, tam giác DBC là tam giác vuông cân tại D. $AD=2a$. Biết (ABC) vuông góc với mặt phẳng (DBC). Thể tích V của khối tứ diện $ABCD$

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=a^3\sqrt{3}$. **C.** $V=\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 22. Trong các khối tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC đều, tam giác DBC là tam giác cân tại D.

$AD = 2a$. Biết (ABC) vuông góc với mặt phẳng (DBC). Khối tứ diện có thể tích lớn nhất là

A. $V = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{9}$. **B.** $V = \dfrac{16a^3}{9}$. **C.** $V = \dfrac{16a^3}{27}$. **D.** $V = \dfrac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{3a^3}{8}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{8}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. Gọi I là trung điểm cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SIB), (SIC) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{3\sqrt{15}}{40}$ và $AB = AD = 1$, $CD = x$. Giá trị của x là

A. $x = 2$. **B.** $x = \dfrac{1}{4}$. **C.** $x = 4$. **D.** $x = \dfrac{1}{2}$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AC = a\sqrt{7}$. Mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt đáy $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính tỉ số $\dfrac{V}{a^3}$.

A. $\dfrac{V}{a^3} = 4$. **B.** $\dfrac{V}{a^3} = 2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{V}{a^3} = 6$. **D.** $\dfrac{V}{a^3} = 12$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SD, AC bằng $\dfrac{4a\sqrt{33}}{33}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{4a^3}{3}$. **C.** $V = a^3$. **D.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$.

Câu 27. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B, $AB = AD = 2a$, $BC = a$. Gọi I là trung điểm cạnh AB, hai mặt phẳng (SIC), (SID) cùng vuông góc với đáy, góc giữa (SCD) và đáy bằng $60°$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{3a^3\sqrt{15}}{5}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{5}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{15}$. **D.** $V = \dfrac{9a^3\sqrt{15}}{5}$.

Câu 28. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Hai mặt phẳng (SDM), (SAN) cùng vuông góc với đáy và (SCD) tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{7a^3\sqrt{3}}{10}$. **B.** $V = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{15}$. **C.** $V = \dfrac{7a^3\sqrt{3}}{30}$. **D.** $V = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{5}$.

Câu 29. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B, $AB = AD = 2a$, $BC = a$. Gọi I là trung điểm cạnh AB, hai mặt phẳng (SIC), (SID) cùng vuông góc với đáy, khoảng cách từ I đến (SCD) bằng $\dfrac{4a}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = 36a^3$. **B.** $V = 18a^3$. **C.** $12a^3$. **D.** $6a^3$.

Câu 30. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ. Trên Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$

A. $V = \frac{a^3}{6}$. **B.** $V = \frac{a^3}{2}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 31. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC đều , tam giác ABD cân tại D, mặt phẳng (ABD) vuông góc với mặt phẳng (ABC), $CD = 2a\sqrt{3}$. Tính độ dài AB khi khối tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

A. $AB = 2a$. **B.** $AB = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $AB = \frac{4a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $AB = 2a\sqrt{3}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, BA = 3a, BC = 4a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $SBC = 30°$ .. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V = a^3\sqrt{3}$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = 3a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 4, tam giác SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD BC. Thể tích khối chóp $S.ABPN$ là x, thể tích khối tứ diện $CMNP$ là y. Giá trị x, y thỏa mãn bất đẳng thức nào dưới đây?

A. $x^2 + 2xy - y^2 > 160$. **B.** $x^2 - 2xy + 2y^2 < 109$.

C. $x^2 + xy - y^4 < 145$. **D.** $x^2 - xy + y^4 > 125$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, tam giác SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \frac{a^3}{6}$. **D.** $V = a^3\sqrt{3}$.

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều, BCD là tam giác vuông cân tại D, $(ABC) \perp (BCD)$ và AD hợp với (BCD) một góc $60°$, $AD = a$. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có $BC = a$, mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với đáy một góc 45^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC đều cạnh a, tam giác SBC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3}{9}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **D.** $V=\frac{a^3}{16}$.

Câu 38. Tứ diện $ABCD$ có hai tam giác ABC và BCD là hai tam giác đều lần lượt nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, biết $AD=a$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{36}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có $BAC=90^{\circ}$, $ABC=30^{\circ}$, SBC là tam giác đều cạnh a và $(SBC)\perp(ABC)$. Tính thể V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3}{16}$. **C.** $V=\frac{a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3}{9}$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, gọi M là trung điểm của AB. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$, biết $SD=2a\sqrt{5}$, SC tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60°. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{4a^3\sqrt{15}}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **C.** $V=\frac{4a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3}{3}$.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB=a, BC=a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB=2a$, $AD=a$. Tam giác SAD cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy lên mặt phẳng $(ABCD)$, SB hợp với đáy một góc 45^{o}. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{17}}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{17}}{6}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{17}}{9}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{17}}{\sqrt{3}}$.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa cạnh SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°, cạnh $AC=a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng AB là điểm H thuộc đoạn AB sao cho $BH=2AH$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết $AC=2a, BD=4a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{2}$.

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA=3a, BC=4a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB=2a\sqrt{3}$ và $SBC=30°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=a^3$. **B.** $V=a^3\sqrt{3}$. **C.** $V=2a^3\sqrt{3}$. **D.** $V=2a^3$.

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=a, AC=2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với mặt phẳng đáy góc $60°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V=\frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a, $SD=a\sqrt{2}, SA=SB=a$ và mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

A. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông $2a$, $SA=a, SB=a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SBA) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Tính theo a thể tích khối chóp $S.$BMND

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, ΔSAC cân tại S. $SBC=60^0$
Mặt phẳng (SAC) vuông góc (ABC). Tính theo a thể tích khối chóp $S.$ABC

A. $V=\frac{a^3}{8}$. **B.** $V=\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 51. Cho hình chóp $S.ABC$ có $(SAC)\perp(ABC)$, SAB là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}, BC=a\sqrt{3}$, đường thẳng SC tạo với đáy góc $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2a^3\sqrt{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 52. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là một tứ giác lồi, $BC=1, CD=\sqrt{13}, DA=\sqrt{17}$. Tam giác SAB đều cạnh bằng 1 và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách từ S đến đường thẳng BC,CD,DA lần lượt bằng $1;2;\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{31\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{31\sqrt{3}}{24}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 53. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 1, tam giác SAB, SCD là các tam giác cân đỉnh S. Khoảng cách từ S đến các đường thẳng AB, CD lần lượt bằng $1; \sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 54. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = SB$, $SC = SD$. Biết $(SAB) \perp (SCD)$ và tổng diện tích của hai tam giác SAB, SCD bằng $\frac{7a^2}{10}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{4a^3}{75}$. **B.** $\frac{4a^3}{15}$. **C.** $\frac{4a^3}{25}$. **D.** $\frac{12a^3}{25}$.

Câu 55. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB, SCD là các tam giác cân đỉnh S. Góc giữa hai mặt phẳng $(SAB),(SCD)$ là 60° và tổng diện tích của hai tam giác SAB, SCD bằng $\frac{3a^2}{4}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{5a^3}{72}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}a^3}{72}$. **D.** $\frac{5a^3}{24}$.

Câu 56. Cho hai tam giác đều ABC và ABD có độ dài cạnh bằng 1 và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi S là điểm đối xứng của B qua đường thẳng DE. Tính thể tích của khối đa diện $ABDSC$.

A. $V = \frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 57. Cho khối chóp S.ABC có các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCA)$ lần lượt tạo với đáy các góc $90^0, 60^0, 60^0$. Biết tam giác SAB vuông cân tại $S, AB = 2a$, chu vi tam giác ABC bằng $10a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{9}$. **B.** $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}a^3}{9}$.

Câu 58. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, các mặt bên $(SBC),(SCA),(SAB)$ lần lượt tạo với đáy các góc $90^0; \alpha; \beta$ sao cho $\alpha + \beta = 90^0$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{3a^3}{16}$. **B.** $\frac{a^3}{8}$. **C.** $\frac{3a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{16}$.

Câu 59. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $A, AB = 1, AC = 2$. Các mặt bên $(SBC),(SCA),(SAB)$ lần lượt tạo với đáy các góc $90^\circ; \alpha; \beta$ sao cho $\alpha + \beta = 90^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Câu 60. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = BD = 1, CD = \sqrt{2}$. Hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) vuông góc với nhau. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

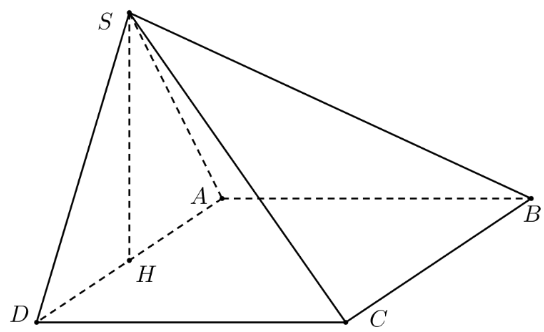
A. $V = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{2}}{6}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	**2.A**	**3.B**	**4.D**	**5.B**	**6.D**	**7.A**	**8.D**	**9.C**	**10.C**
11.B	**12.C**	**13.C**	**14.D**	**15.A**	**16.A**	**17.B**	**18.A**	**19.B**	**20.C**
21.D	**22.C**	**23.C**	**24.D**	**25.B**	**26.D**	**27.A**	**28.B**	**29.C**	**30.A**
31.C	**32.D**	**33.C**	**34.B**	**35.C**	**36.A**	**37.C**	**38.D**	**39.B**	**40.A**
41.D	**42.A**	**43.A**	**44.C**	**45.C**	**46.C**	**47.B**	**48.B**	**49.A**	**50.D**
51.D	**52.C**	**53.A**	**54.A**	**55.C**	**56.D**	**57.D**	**58.D**	**59.D**	**60.D**

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn B



Gọi H là trung điểm $AD \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ SH \perp AD \end{cases}$

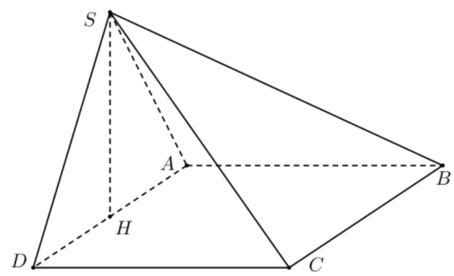
$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Câu 2. Chọn A

Gọi H là trung điểm $AD \Rightarrow SH = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

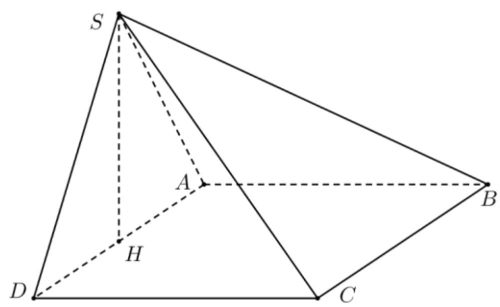
Ta có $\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ SH \perp AD \end{cases}$



.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \dfrac{a^3}{6}$

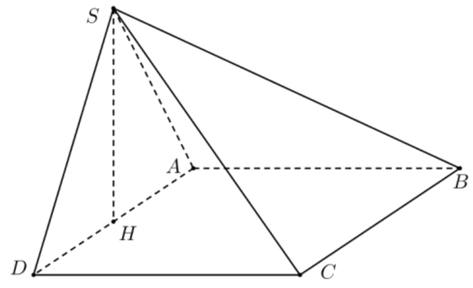
Câu 3. Chọn B



Gọi H là trung điểm $AD \Rightarrow SH = \dfrac{3a}{2}$. Ta có $\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \Rightarrow SH \perp (ABCD). \\ SH \perp AD \end{cases}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}.a.a\sqrt{3}.\frac{3a}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4. Chọn D

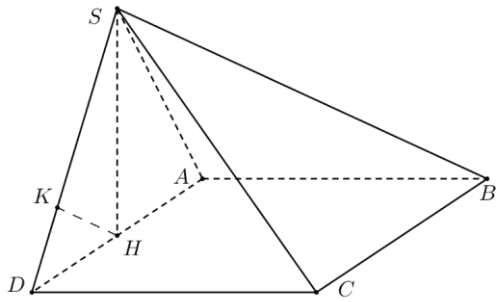


Gọi H là trung điểm $AD\Rightarrow SH=\frac{AD}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)\\(SAD)\cap(ABCD)=AD\\SH\perp AD\end{cases}$

$\Rightarrow SH\perp(ABCD)$. Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH=\frac{1}{3}.a.a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{2}$.

Câu 5. Chọn B



Gọi H là trung điểm AD.

Ta có $\begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)\\(SAD)\cap(ABCD)=AD\\SH\perp AD\end{cases}$

$\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

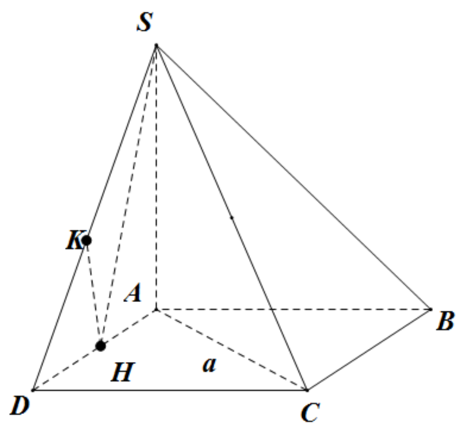
Lại có $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH\Rightarrow SH=\frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}}=2a$.

Kẻ $HK\perp SD$ tại K, khi đó ta chứng minh được $HK\perp(SCD)$ nên $HK=d\big(H;(SCD)\big)$.

$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HD^2}+\frac{1}{HS^2}\Rightarrow HK=\frac{2a}{3}$. Ta có $AB//(SCD)$ nên $d\big(B;(SCD)\big)=d\big(A;(SCD)\big)$.

$AH\cap(SCD)=D$ nên $\frac{d\big(A;(SCD)\big)}{d\big(H;(SCD)\big)}=\frac{AD}{HD}=2$. Vậy $d\big(B;(SCD)\big)=2d\big(H;(SCD)\big)=\frac{4a}{3}$.

Câu 6. Chọn D



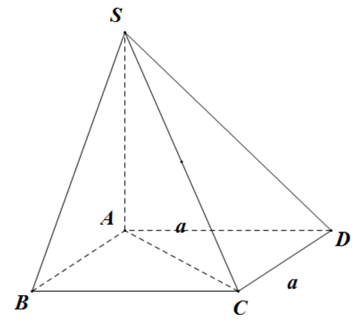
Gọi H là trung điểm của $AD\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Ta có

$d_A=d_B=2\mathrm{d}_H=2HK=\frac{2SH.HD}{\sqrt{SH^2+HD^2}}=\frac{4\mathrm{a}}{3}\Rightarrow SH=2\mathrm{a}$.

Vậy, thể tích của khối chóp $V_{SABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{4\mathrm{a}^3}{3}$.

Câu 7. Chọn A



Diện tích đáy $S_{ABCD}=a^2$ và $h=\sqrt{SC^2-HC^2}=a$.

Vậy, thể tích của khối chóp $V_{SABCD}=\frac{1}{3}h.S_{ABCD}=\frac{a^3}{3}$.

Câu 8. Chọn D

Diện tích đáy $S_{ABCD}=a^2\sqrt{3}$ và $h=\sqrt{SC^2-HC^2}=\frac{3a}{2}$.

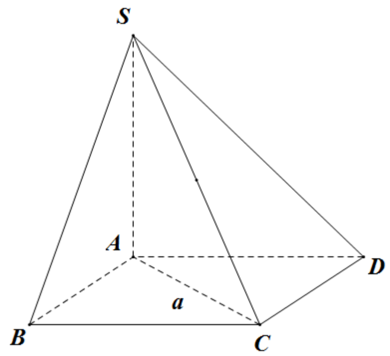
Vậy, thể tích của khối chóp $V_{SABCD}=\frac{1}{3}h.S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 9. Chọn C

Diện tích đáy $S_{ABCD}=\frac{AC.BD}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ và $AB=\sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BD}{2}\right)^2}=a$.

Do đó: $h=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy, thể tích của khối chóp $V_{SABCD}=\frac{1}{3}h.S_{ABCD}=\frac{a^3}{4}$.

Câu 10. Chọn C

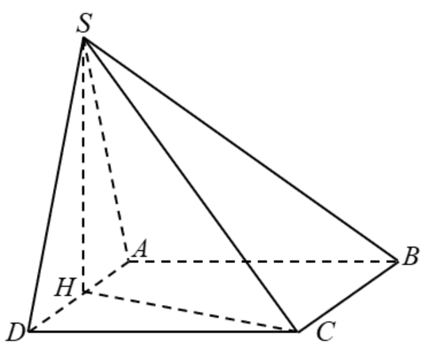


Diện tích đáy $S_{ABCD}=\frac{AC.BD}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ và $AB=\sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BD}{2}\right)^2}=a$.

Do đó: $h=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$

Vậy, thể tích của khối chóp $V_{SABCD}=\frac{1}{3}h.S_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 11. Chọn B

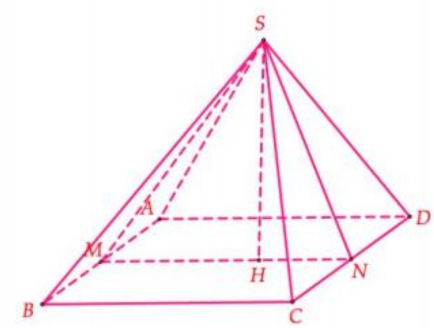


Đặt $AB=x$, Gọi H là trung điểm cạnh AD, ta có $SH\perp(ABCD)$.

Ta có $S=x^2,h=\sqrt{SC^2-HC^2}=\sqrt{SC^2-HD^2-CD^2}=\sqrt{12-\frac{5x^2}{4}}$.

Vì vậy $V=\frac{1}{3}Sh=f(x)=\frac{1}{3}x^2\sqrt{12-\frac{5x^2}{4}}\le f\left(\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)=\frac{64}{15}$.

Câu 12. Chọn C



Ta có $S = 2a^2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD ta có

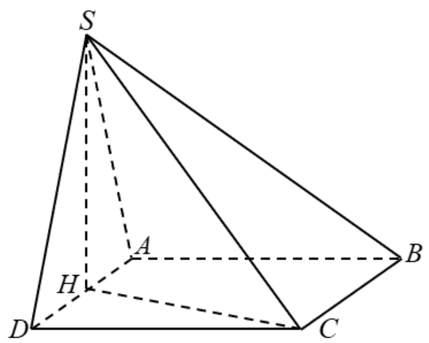
$\begin{cases} SM \perp AB \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow SM \perp CD; \begin{cases} SM \perp CD \\ SN \perp CD \end{cases} \Rightarrow (SMN) \perp CD \Rightarrow (SMN) \perp (ABCD)$.

Gọi H là chân đường cao hạ từ S xuống MN ta có $SH \perp (ABCD)$.

Mặt khác $SM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, MN = a\sqrt{2}, SN = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow SM^2 + SN^2 = MN^2 \Rightarrow SM \perp SN$.

Vì vậy $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{SM^2} + \dfrac{1}{SN^2} = \dfrac{8}{3a^2} \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Vậy $V = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

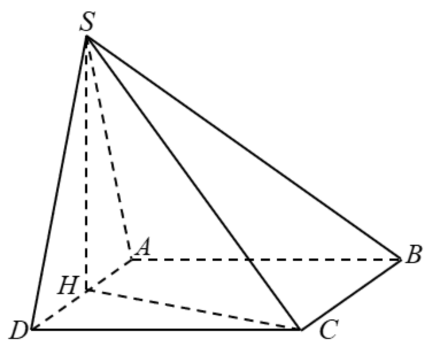
Câu 13. Chọn C



Gọi H là trung điểm cạnh AB, ta có $SH \perp (ABCD)$ và theo Pitago ta có

$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = 2a$. Vậy $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \dfrac{4a^3}{3}$.

Câu 14. Chọn D



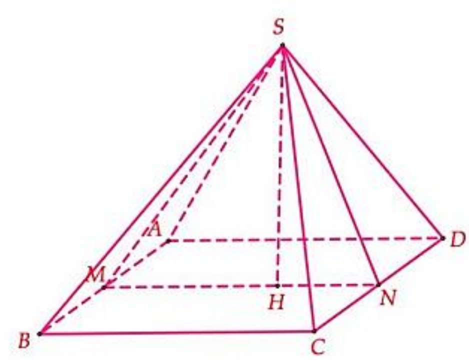
Đặt $AD = x$, gọi H là trung điểm cạnh AD, ta có $SH \perp (ABCD)$.

Khi đó $HC = \sqrt{HD^2 + DC^2} = \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + 16} \Rightarrow SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{20 - \dfrac{x^2}{4}}$.

Vì vậy $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}.4x.\sqrt{20-\frac{x^2}{4}}=\frac{2\sqrt{x^2\left(80-x^2\right)}}{3}\le\frac{x^2+\left(80-x^2\right)}{3}=\frac{80}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x^2=80-x^2\Leftrightarrow x=2\sqrt{10}$.

Câu 15. Chọn A



Đặt $AD=x$, gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD ta có

$$\begin{cases} SM\perp AB \\ SN\perp CD \\ AB//CD \end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(SMN\right)\Rightarrow\left(ABCD\right)\perp\left(SMN\right).$$

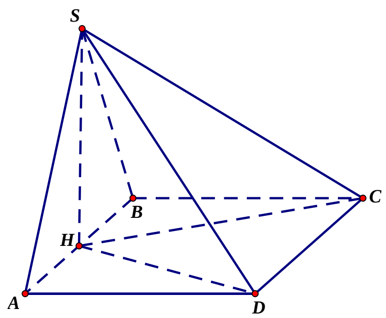
Gọi H là chân đường cao hạ từ S xuống MN ta có $SH\perp\left(ABCD\right)$.

Trong tam giác SMN ta có $SM=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3},SN=\frac{CD\sqrt{3}}{2}=3,MN=AD=x$.

Do đó $h=SH=\frac{2S_{SMN}}{MN}=\frac{\sqrt{-x^4+24x^2-36}}{2x}$.

Ta có $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{2x\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{-x^4+24x^2-36}}{2x}=f\left(x\right)=\frac{\sqrt{3\left(-x^4+24x^2-36\right)}}{3}\le f\left(2\sqrt{3}\right)=6$

Câu 16. Chọn A



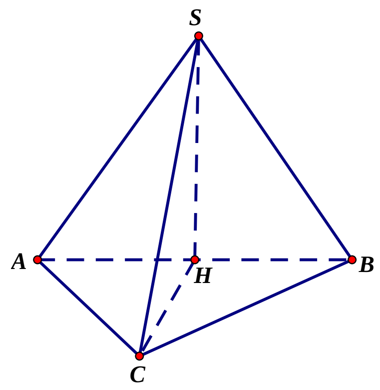
Ta có $S_{ABCD}=AB.AD=\sqrt{3}a^2$.

Do các mặt phẳng $\left(SHC\right),\left(SHD\right)$ cùng vuông góc với đáy nên $SH\perp\left(ABCD\right)$, suy ra góc giữa SD và $\left(ABCD\right)$ là $SDH=60^\circ$.

Ta có $HD=\sqrt{AH^2+AD^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{13}}{2}$, $SH=HD\tan60^\circ=\frac{a\sqrt{39}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{39}}{2}.\sqrt{3}a^2=\frac{a^3\sqrt{13}}{2}$.

Câu 17. Chọn B



Do tam giác ABC đều cạnh $2a$ nên $S_{ABC}=(2a)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}a^2$.

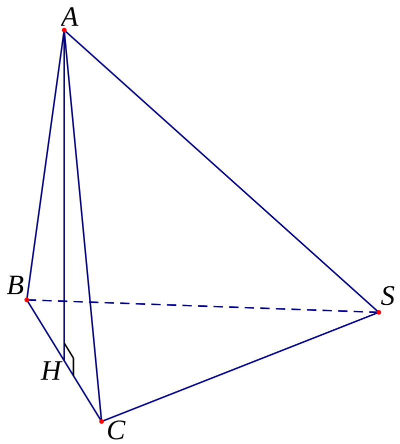
Gọi H là trung điểm của AB, do tam giác SAB cân tại S nên $SH\perp AB$.

Mặt khác, vì $(SAB)\perp(ABC)$ nên $SH\perp(ABC)$, suy ra góc giữa SC và (ABC) là $SCH=60°$.

Vì tam giác ABC đều cạnh $2a$ nên $CH=a\sqrt{3}\Rightarrow SH=SH\tan 60°=3a$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}3a.\sqrt{3}a^2=\sqrt{3}a^3$.

Câu 18. Chọn A



Gọi H là trung điểm cạnh $BC\Rightarrow AH\perp BC$.

Mà $(ABC)\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp(SBC)$.

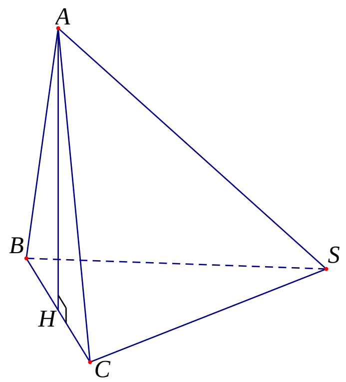
Mặt khác, $AS=AB=AC\ \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta SBC\ \Rightarrow\Delta SBC$ vuông tại S.

Khi đó, $S_{SBC}=\dfrac{1}{2}SB.SC=\dfrac{a^2\sqrt{6}}{6}$;

$BC=\sqrt{SB^2+SC^2}=\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$; $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=a\sqrt{\dfrac{7}{12}}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{1}{3}AH.S_{SBC}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{\dfrac{7}{12}}.\dfrac{a^2\sqrt{6}}{6}=\dfrac{a^3\sqrt{14}}{36}$.

Câu 19. Chọn B



Gọi H là trung điểm cạnh $BC\Rightarrow AH\perp BC$.

Mà $(ABC)\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp(SBC)$.

Mặt khác, $AS=AB=AC\ \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta SBC\ \Rightarrow\Delta SBC$ vuông tại S.

Khi đó, $S_{SBC}=\dfrac{1}{2}SB.SC=\dfrac{ax}{2}$; $BC=\sqrt{SB^2+SC^2}=\sqrt{a^2+x^2}$;

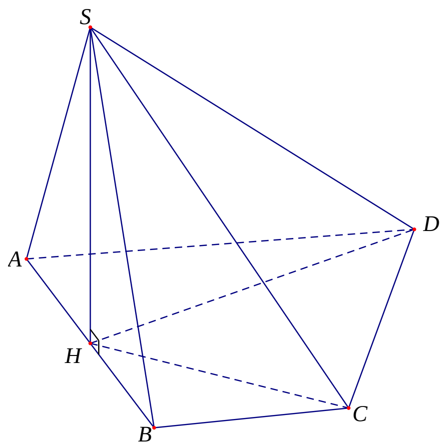
$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2+x^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{3a^2-x^2}}{2}$.

Suy ra thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}AH.S_{SBC} = \frac{1}{3}.\frac{ax}{2}.\frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2} = \frac{ax\sqrt{3a^2 - x^2}}{12}$.

Ta có $x\sqrt{3a^2 - x^2} = \sqrt{x^2\left(3a^2 - x^2\right)} \le \frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow V \le \frac{a^3}{8}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 20. Chọn C



Gọi H là trung điểm cạnh $AB \Rightarrow SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $h = SH = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$. Ta có $S = S_{HBC} + S_{HCD} + S_{HDA}$

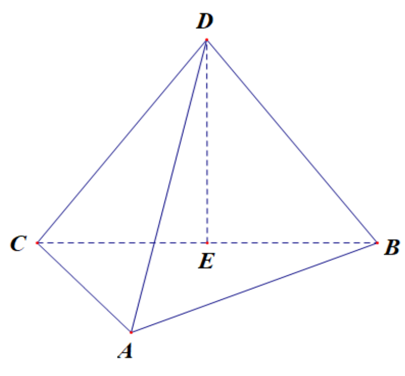
$= \frac{1}{2}\left(BC.HK + CD.HT + DA.HI\right)$

(với K, T, I lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng BC, CD, DA).

$= \frac{1}{2}\left(BC + CD + DA\right).h.\cot 60^\circ = \frac{1}{2}(9a - a).\frac{a}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}.\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 21. Chọn D

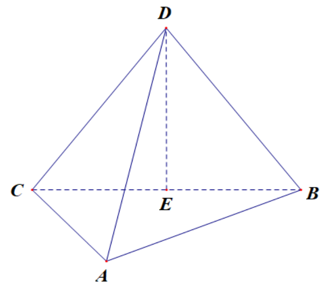


Gọi E là trung điểm của BC. Ta có $DE \perp BC \Rightarrow DE \perp (ABC)$.

Đặt $BC = x \Rightarrow DE = \frac{1}{2}CB = \frac{x}{2}; AE = \frac{x\sqrt{3}}{2}$; Ta có $AE^2 + DE^2 = AD^2 \Rightarrow x = 2a$

$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.DE = \frac{1}{3}\frac{(2a)^2.\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 22. Chọn C



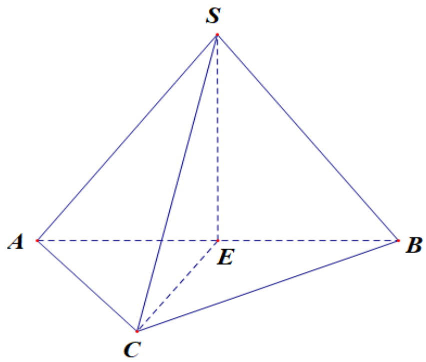
Gọi E là trung điểm của BC. Ta có $DE \perp BC \Rightarrow DE \perp (ABC)$.

Đặt $BC = x \Rightarrow AE = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$; $DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{3x^2}{4}}$

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.DE = \frac{1}{3}.\frac{x^2\sqrt{3}}{4}.\sqrt{4a^2 - \frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}.\sqrt{\frac{3x^2}{2}.\frac{3x^2}{2}\left(16a^2 - 3x^2\right)}}{36} \le \frac{16a^3}{27}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \dfrac{4a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 23. Chọn C



Gọi E là trung điểm của AB. Ta có $SE \perp AB \Rightarrow SE \perp (ABC)$.

$$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3}.S_{SBC}.SE = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{8}.$$

Câu 24. Chọn D

Ta có $\begin{cases} (SIB) \perp (ABCD) \\ (SIC) \perp (ABCD) \\ (SIB) \cap (SIC) = SI \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$

Gọi H là hình chiếu I lên $BC \Rightarrow IH \perp BC$. Ta có $BC \perp (SIH) \Rightarrow BC \perp SH$

$\Rightarrow ((SBC);(ABCD)) = (IH;SH) = SHI = 60°$; $BC = \sqrt{(x-1)^2 + 1} = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(AB + CD).AD = \dfrac{x+1}{2}$; $S_{\Delta IAB} = \dfrac{1}{4}$; $S_{\Delta ICD} = \dfrac{x}{4}$

$S_{\Delta IBC} = S_{ABCD} - S_{\Delta IAB} - S_{\Delta ICD} = \dfrac{x+1}{4} \Rightarrow IH = \dfrac{2S_{\Delta IBC}}{BC} = \dfrac{x+1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$

Ta có $SI = IH.\tan 60° = \dfrac{\sqrt{3}(x+1)}{2\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$. Vậy $V = \dfrac{1}{3}.SI.S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}(x+1)^2}{12\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \dfrac{3\sqrt{15}}{40} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Câu 25. Chọn B

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$

Ta có $\begin{cases}(SAB)\cap(ABCD)=AB\\(SAB)\perp(ABCD)\\SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

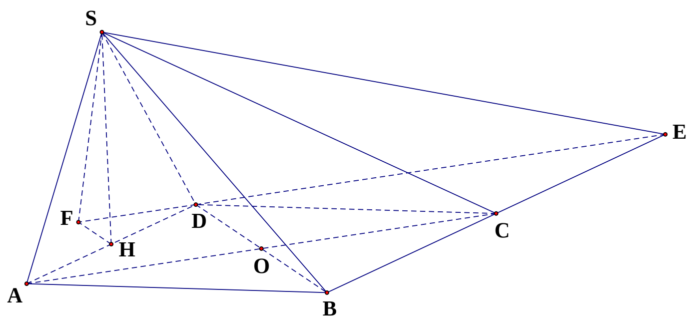
Ta có $\left(SC;(ABCD)\right)=(SC;HC)=SCH=60^\circ$

Ta có $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=a\sqrt{3}$, $HC=\sqrt{BC^2-HB^2}=a\sqrt{2}$

Ta có $SH=HC.\tan 60^\circ=a\sqrt{6}$; $S_{ABCD}=AB.BC=2a.a\sqrt{3}=2\sqrt{3}a^2$

$V=V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{6}.2\sqrt{3}a^2=2\sqrt{2}a^3\Rightarrow\frac{V}{a^3}=2\sqrt{2}$.

Câu 26. Chọn D



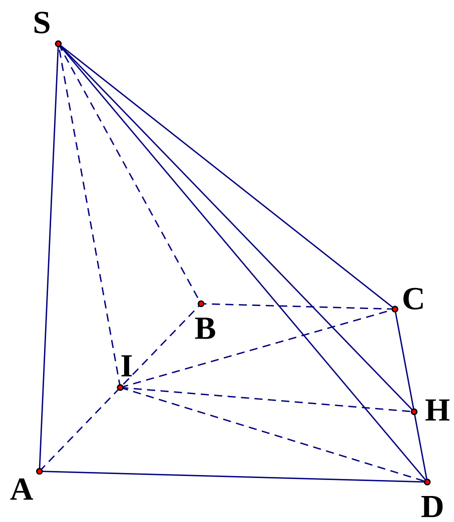
Gọi H là trung điểm AD ta có: $SH\perp(ABCD)$. Dựng hình bình hành $ACDE$ ta có:

$d(AC,SD)=d\left(AC;(SDE)\right)=d\left(A;(SDE)\right)=2d\left(H;(SDE)\right)=2HK$

Và $2HK=2.\frac{HF.SH}{\sqrt{HF^2+SH^2}}=\frac{4a\sqrt{33}}{33}$ vì $HF//DO$ và $HF=\frac{1}{2}DO=\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Do đó $SH=2a$

Vì vậy $V=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.2a.a^2=\frac{2a^3}{3}$.

Câu 27. Chọn A



Ta có $S=\frac{BC+AD}{2}.AB=3a^2$ và $SI\perp(ABCD)$.

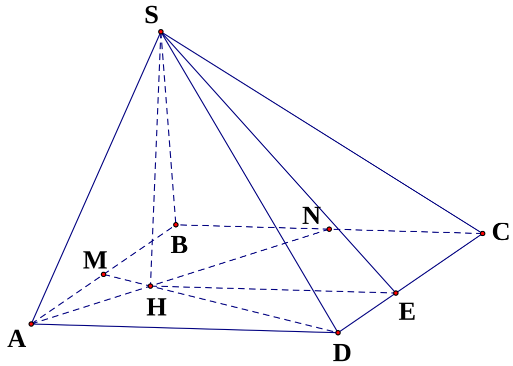
Kẻ $IH\perp CD$ $(H\in CD)\Rightarrow SHI=60^\circ$ và $h=IH.\tan 60^\circ=IH\sqrt{3}$.

Tam giác ICD có $IH=\frac{2S_{ICD}}{CD}=\frac{2\left(S-S_{IBC}-S_{IAD}\right)}{CD}$

$=\frac{3a}{\sqrt{5}}\Rightarrow h=\frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $V=\frac{S.h}{3}=\frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.

Câu 28. Chọn B



Ta có: $dt\left(ABCD\right)=a^2$. Gọi $H=DM\cap AN\Rightarrow SH=\left(SDM\right)\cap\left(SAN\right)\Rightarrow SH\perp\left(ABCD\right)$.

Kẻ $HE\perp CD$ $\left(E\in CD\right)\Rightarrow SEH=60°$. Ta cũng có $AN\perp DM$.

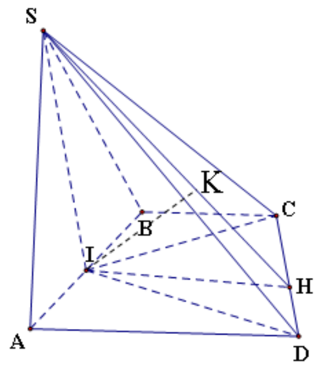
Ta có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{5}{a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$, $AN=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow\dfrac{AH}{AN}=\dfrac{2}{5}$.

và $\dfrac{DE}{DC}=\dfrac{AH}{AN}\Rightarrow DE=\dfrac{2}{5}DC=\dfrac{2a}{5}$.

Ta có: $DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{5}}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}\Rightarrow HE=\sqrt{DH^2-DE^2}=\sqrt{\dfrac{4a^2}{5}-\dfrac{4a^2}{25}}=\dfrac{4a}{5}$.

Vì vậy $h=SH=HE.\tan 60°=\dfrac{4a\sqrt{3}}{5}$. Vậy $V=\dfrac{1}{3}.SH.dt\left(ABCD\right)=\dfrac{1}{3}a^2.\dfrac{4a\sqrt{3}}{5}=\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{15}$.

Câu 29. Chọn C



Ta có: $dt\left(ABCD\right)=\dfrac{AD+BC}{2}.AB=3a^2$.

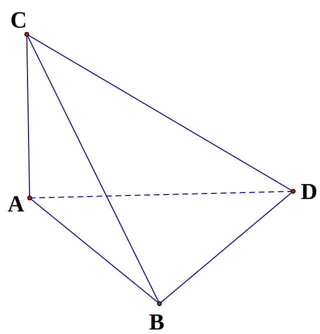
Kẻ $IH\perp CD$ $\left(H\in CD\right)$, $IK\perp SH$ $\left(K\in HS\right)$ $\Rightarrow IK\perp\left(SCD\right)$,

$IK=d_1=\dfrac{4a}{3}$.

Ta có $IH=\dfrac{2S_{ICD}}{CD}=\dfrac{2\left(S-S_{IAB}-S_{IAD}\right)}{CD}=\dfrac{2\left(3a^2-\dfrac{a^2}{2}-a^2\right)}{a\sqrt{5}}=\dfrac{3a}{\sqrt{5}}$.

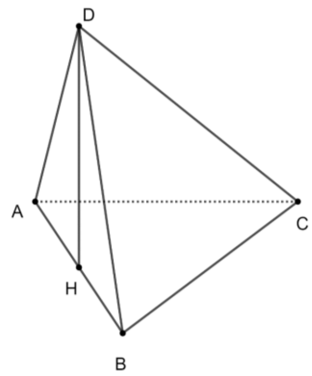
Do đó $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{d_1^2}-\dfrac{1}{IH^2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{4a}{3}\right)^2}-\dfrac{1}{\left(\dfrac{3a}{\sqrt{5}}\right)^2}=\dfrac{1}{144a^2}\Rightarrow h=12a$. Do đó $V=\dfrac{1}{3}h.dt\left(ABCD\right)=12a^3$.

Câu 30. Chọn A



Theo giả thuyết ta có ΔABD vuông tại B. Có $CA \perp AB \Rightarrow CA \perp (ABD)$.

Do đó $V = \dfrac{S_{ABD}.CA}{3} = \dfrac{\frac{1}{2}a.a.a}{3} = \dfrac{a^3}{6}$.



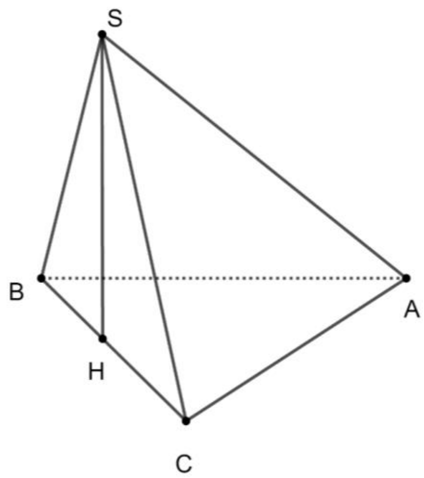
Câu 31. Chọn C

Đặt $AB = x$, gọi H là trung điểm của AB, ta có $DH \perp (ABC)$ và $h = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{12a^2 - \dfrac{3}{4}x^2}$.

Vậy

$$V = \frac{Sh}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{12a^2 - \frac{3x^2}{4}} = f(x) = \frac{x^2\sqrt{16a^2 - x^2}}{8} \le f\left(\frac{4a\sqrt{6}}{3}\right).$$

Dấu bằng đạt tại $x = \dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$.



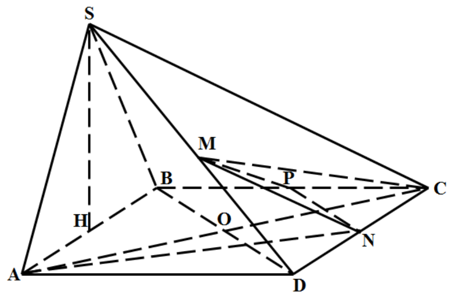
Câu 32. Chọn D

Kẻ SH vuông góc với BC suy ra $SH \perp (ABC)$.

Có $SH = SB.\sin SBC = a\sqrt{3}$ và $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BA.BC = 6a^2$.

Suy ra $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 33. Chọn C



Gọi H là trung điểm của cạnh AB. Do ΔSAB đều và $(SAB) \perp (ABCD)$ $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có ΔSAB đều và cạnh bằng 4 $\Rightarrow SH = 2\sqrt{3}$.

Có $S_{ABPN} = S_{ABCD} - S_{AND} - S_{CPN} = AB^2 - \dfrac{AD.DN}{2} - \dfrac{CN.CP}{2} = 10$.

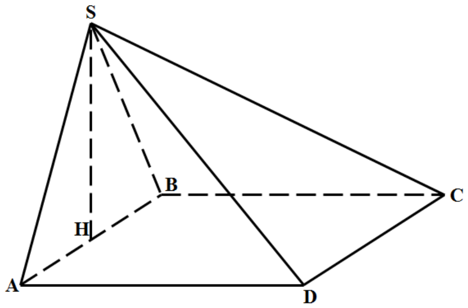
Thể tích khối chóp $S.ABPN$ là $V_{ABPN} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABPN} = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow x = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$.

Ta có M là trung điểm của SD $\Rightarrow d(M,(ABCD)) = \dfrac{1}{2}d(S,(ABCD)) = \dfrac{1}{2}SH = \sqrt{3}$.

Thể tích khối tứ diện $MCPN$ là

$$V_{MCPN} = \frac{1}{3}d(M,(ABCD))S_{CPN} = \frac{1}{3}d(M,(ABCD)).\frac{CN.CP}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 34. Chọn B

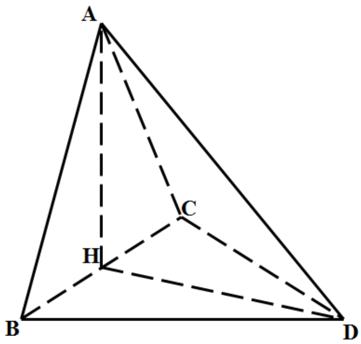


Gọi H là trung điểm của cạnh AB. Do ΔSAB đều và $(SAB)\perp(ABCD)$ $\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Ta có ΔSAB đều và cạnh bằng a $\Rightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Có $S_{ABCD}=AB^2=a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 35. Chọn C



Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Do ΔABC đều và $(ABC)\perp(BCD)$ $\Rightarrow AH\perp(BCD)$.

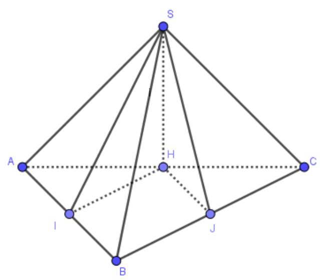
Ta có HD là hình chiếu của AD lên $(BCD)\Rightarrow(AD,(BCD))=(AD,HD)=ADH=60°$.

Có $AH=AD.\sin ADH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HD=AD.\cos ADH=\dfrac{a}{2}$.

Mà ΔBCD vuông cân tại D nên $BC=2DH=a$.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}AH.S_{BCD}=\dfrac{1}{3}AH.\dfrac{BC.DH}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 36. Chọn A



Kẻ $SH\perp AC$ vì $(SAC)\perp(ABC)\Rightarrow SH\perp(ABC)$

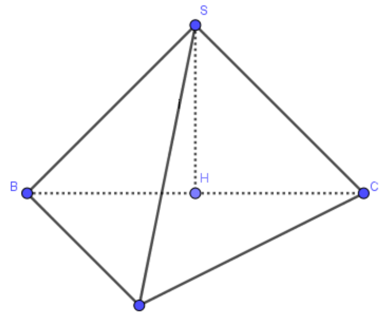
Gọi I, J lần lượt là hình chiếu của H trên AB và BC suy ra $SI\perp AB, SJ\perp BC$

Theo giả thiết $SIH=SIK=45°$. Ta có $\Delta SHI=\Delta SHJ\Rightarrow HI=HJ$

Tứ giác $HIBJ$ là hình thoi nên BH là đường phân giác của ΔABC suy ra H là trung điểm AC

$HI = HJ = SH = \frac{a}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \frac{a^3}{12}$.

Câu 37. Chọn C



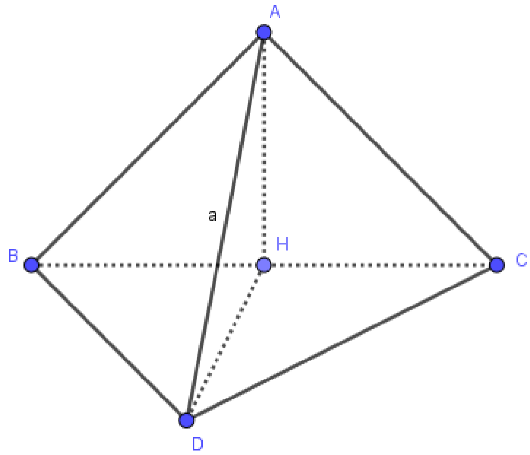
Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow SH \perp BC$.

Ta có

$(SBC) \perp (ABC)$ và $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 38. Chọn D



Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow AH \perp BC$

Ta có $(ABC) \perp (BCD)$, $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (BCD)$

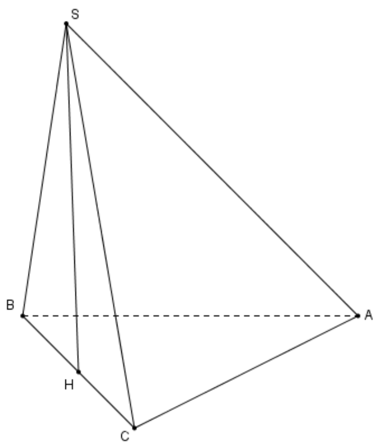
Và $\Delta ABC = \Delta BCD \Rightarrow AH = DH$

Do đó AHD vuông cân tại $H \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Mà $AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = \frac{2AH}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Do đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{\sqrt{2}}.\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$.

Câu 39. Chọn B

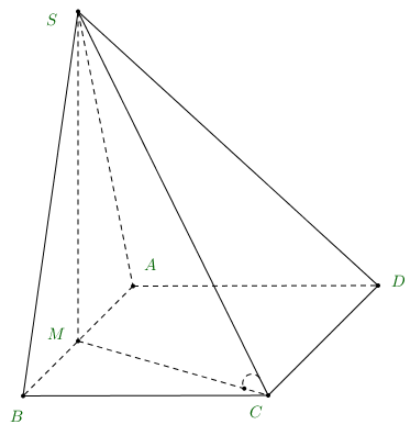


Gọi H là trung điểm của BC. Vì SBC là tam giác đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.Theo giả thiết ta có $(SBC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Ta có $BC = a$ nên $AB = BC.\cos 30^{\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AC = BC.\sin 30^{\circ} = \frac{a}{2}$.

Suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Do đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{a^3}{16}$.

Câu 40. Chọn A



Theo giả thiết ta có $SM \perp (ABCD)$.

$(SC;(ABCD)) = (SC;MC) = SCM = 60^o$.

Trong tam giác vuông SMC và SMD ta có:

$SM = \sqrt{SD^2 - MD^2} = MC.\tan 60^o$ mà $ABCD$ là hình vuông nên $MC = MD$.

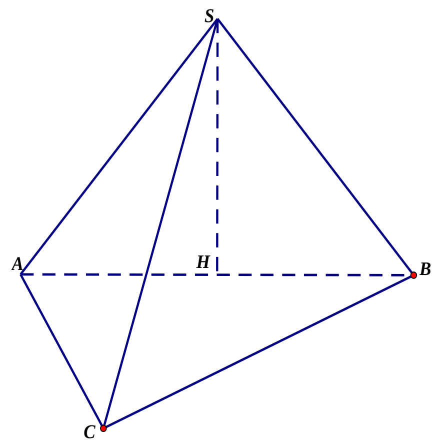
$\Rightarrow SD^2 - MC^2 = 3MC^2 \Rightarrow MC = a\sqrt{5} \Rightarrow SM = a\sqrt{15}$.

Lại có $MC^2 = BC^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{5BC^2}{4}$

$\Rightarrow BC = 2a \Rightarrow S_{ABCD} = 4a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SM.S_{ABCD} = \dfrac{4a^3\sqrt{15}}{3}$.

Câu 41. Chọn D



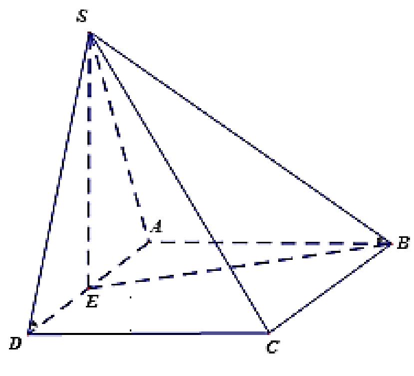
Do tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy nên chiều cao của hình chóp là $h = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Tam giác ABC vuông tại A

$\Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{2}a$,

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{\sqrt{2}a^2}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}h.S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

Câu 42. Chọn A.



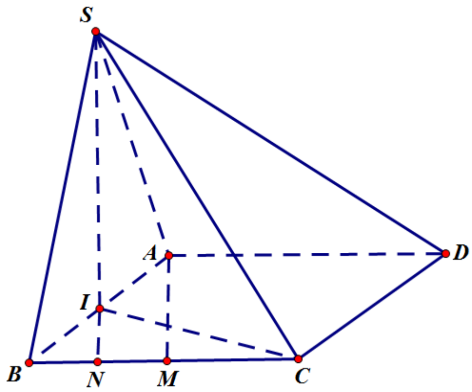
Gọi E trung điểm của AD. Khi đó $SE \perp (ABCD)$

$V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SE$, $S_{ABCD} = 2a^2$; EB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$

$\Rightarrow (SB,(ABCD)) = SBE = 45^o \Rightarrow SE = BE.$; $BE = \sqrt{AE^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + 4a^2} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$.

$\Rightarrow SE=\dfrac{a\sqrt{17}}{2}$. Vậy $V=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{17}}{2}.2a^2=\dfrac{a^3\sqrt{17}}{3}$.

Câu 43. Chọn A



Gọi I là trung điểm của đoạn AB

Suy ra,

$SI\perp AB\, mà\, (SAB)\perp(ABCD)\Rightarrow SI\perp(ABCD)$

Nên $SCI=\left(SC;(ABCD)\right)=60°, CI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

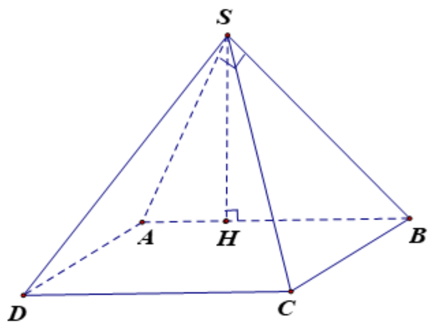
Suy ra, $SI=CI.\tan 60°=\dfrac{3a}{2}$

Gọi M là trung điểm của đoạn BC, N là trung điểm của đoạn BM.

$AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow IN=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Ta có $S_{ABCD}=2S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{3a}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 44. Chọn C



$S_{ABCD}=a^2$.

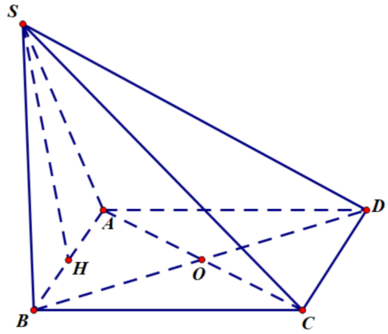
$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\Rightarrow SH\perp(ABCD).\\SH\perp AB\end{cases}$$

Xét tam giác SAB vuông tại S có SH là đường cao.

$SH^2=BH.AH=2AH^2=2.\dfrac{1}{9}a^2\Rightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$: $V=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{3}.a^2=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 45. Chọn C.

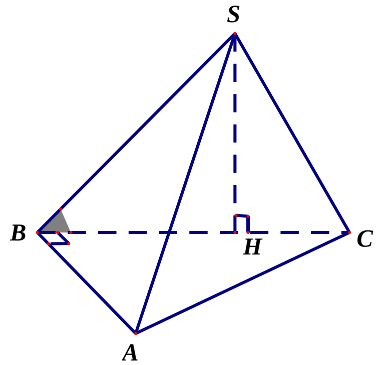


Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{AC.BD}{2} = 4a^2$. Gọi H là trung điểm AB . Ta có ΔSAB đều $\Rightarrow SH \perp AB$

Do $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$; $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = a\sqrt{5}$

$SH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$. $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.4a^2.\dfrac{a\sqrt{15}}{2} = \dfrac{2a^3\sqrt{15}}{3}$.

Câu 46. Chọn C



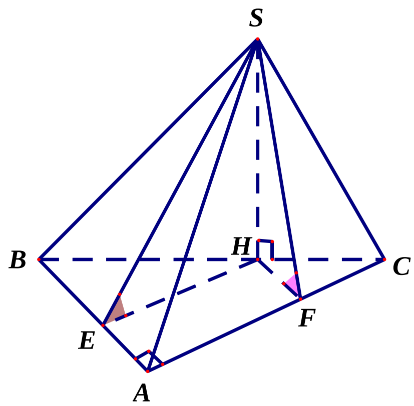
Gọi H là hình chiếu của S trên BC.

Vì $(SBC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến $BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Ta có :

$SH = SB.\sin 60° = a\sqrt{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 47. Chọn B



Kẻ $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Kẻ $HE \perp AB, HF \perp AC$, ta có: $SEH = SFH = 60°$ và

$HE = SH.\cot 60° = h\cot 60°$, $HF = SH.\cot 60° = h\cot 60°$

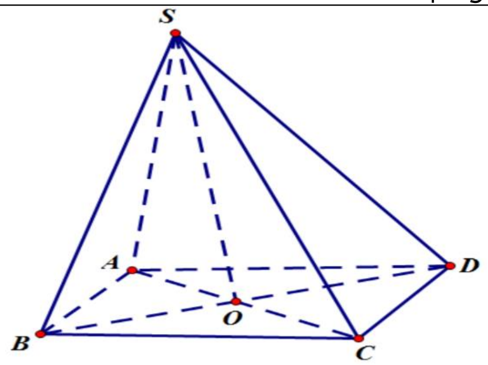
Diện tích đáy bằng $S = \dfrac{1}{2}.AB.AC = a^2$.

Mặt khác :

$S = S_{HAB} + S_{HAC} = \dfrac{1}{2}(AB.HE + AC.HF) = \dfrac{1}{2}(a.h.\cot 60° + 2a.h.\cot 60°)$.

Vậy $h = \dfrac{2S}{\dfrac{a}{\sqrt{3}} + \dfrac{2a}{\sqrt{3}}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}.S.h = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. Chọn B.

Câu 48. Chọn B



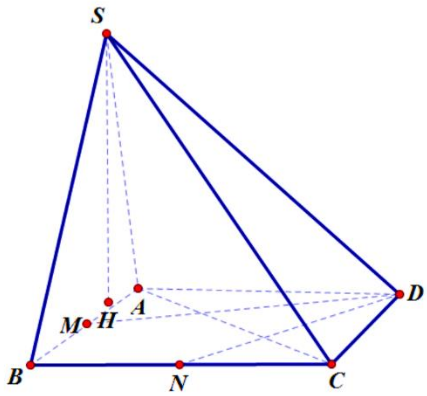
$AS = AB = AD \Rightarrow SO = BO = DO$ hay ΔSBD vuông tại S

Ta có $\begin{cases} AO \perp BO \\ AO \perp SO \end{cases} \Rightarrow AO \perp (SBD)$

$BD = \sqrt{SD^2 + SB^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$; $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$

$V_{ASBD} = \frac{1}{3}AO.S_{SBD} = \frac{1}{3}AO.\frac{1}{2}.SB.SD = \frac{1}{6}.\frac{a}{2}.a.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Suy ra $V_{S.ABCD} = 2V_{ASBD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 49. Chọn A



Kẻ $SH \perp AB$ $(H \in AB)$

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$

$AB^2 = SA^2 + SB^2 \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại H.

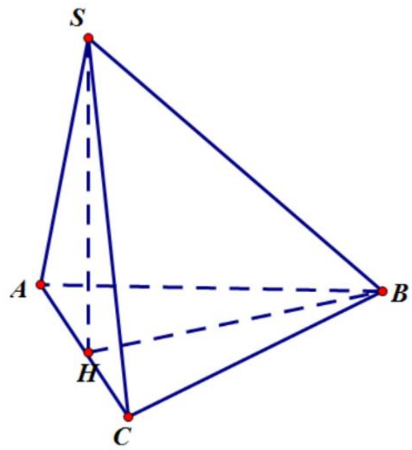
$SH = \frac{SA.SB}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$S_{BMND} = S_{ABCD} - S_{AMD} - S_{NCD} = 4a^2 - 2.\frac{1}{2}a.2a = 2a^2$

Vậy thể tích khối chóp $S.$BMND

$V_{S.BMND} = \frac{1}{3}SH.S_{BMND} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 50. Chọn D



Gọi H là trung điểm AC : $SH \perp (ABC)$ vì $(SAC) \perp (ABC)$. Giả sử $SH = x$ $(x > 0)$

Ta có $SC^2 = SH^2 + HC^2 = x^2 + \frac{a^2}{4}$;

$SB^2 = SH^2 + HB^2 = x^2 + \frac{3a^2}{4}$

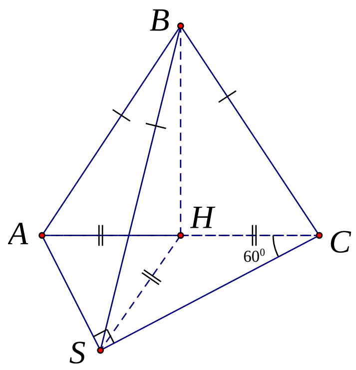
Áp dụng định lý cosin trong tam giác (SBC)

$SC^2 = SB^2 + BC^2 - 2.SB.BC.\cos SBC$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{a^2}{4} = x^2 + \frac{3a^2}{4} - a\sqrt{x^2 + \frac{3a^2}{4}} + a^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 51. Chọn D



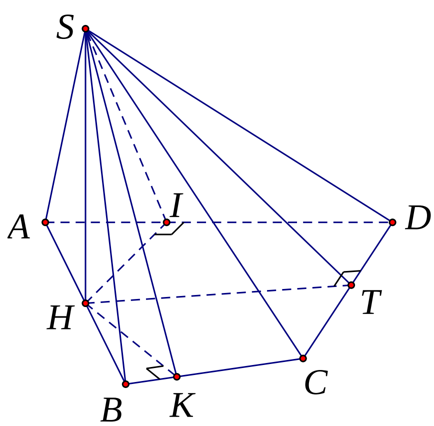
Có $BA = BS = BC = \sqrt{3}a$ nên hình chiếu vuông góc H của B lên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ASC. Mặt khác $\begin{cases} BA = BC \\ (BAC) \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow H$ là trung điểm cạnh AC.

Do đó tam giác ASC vuông tại S. Và cũng có $SCA = 60° = (SC, (ABC))$.

Vậy có $SC = AS\cot 60° = \sqrt{3}a.\frac{1}{\sqrt{3}} = a$,

$$AC = 2a \Rightarrow \begin{cases} S_{SAC} = \frac{1}{2}SA.SC = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} \\ BH = \sqrt{BA^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2} \end{cases}. \text{ Vậy } V = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a^2}{2}.\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{6}a^3}{6}.$$

Câu 52. Chọn C



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $h = SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $HK \perp BC, HT \perp CD, HI \perp DA$ ta có $SK \perp BC, ST \perp CD, SI \perp DA$ và theo giả thiết có $SK = 1; ST = 2; SI = \sqrt{5}$.

Vì vậy theo pitago cho các tam giác vuông SHK, SHT, SHI ta có:

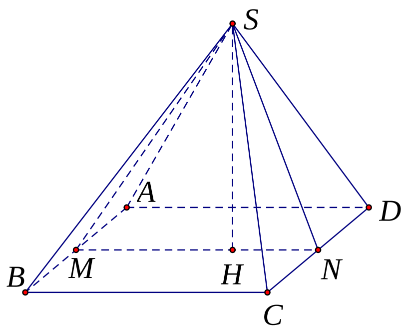
$HK = \sqrt{SK^2 - SH^2} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$. $HI = \sqrt{SI^2 - SH^2} = \sqrt{5 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Vì vậy, diện tích đáy của hình chóp là:

$$S = S_{HBC} + S_{HCD} + S_{HDA} = \frac{1}{2}(HK.BC + HT.CD + HI.DA) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}.1 + \frac{\sqrt{13}}{2}.\sqrt{13} + \frac{\sqrt{17}}{2}.\sqrt{17}\right) = \frac{31}{4}.$$

Vậy thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{31}{4} = \frac{31\sqrt{3}}{24}$.

Câu 53. Chọn A



Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB,CD ta có

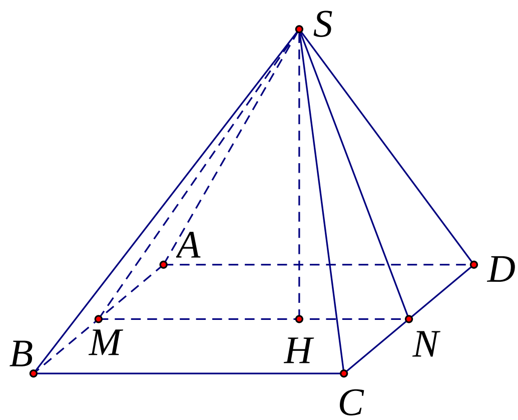
$$\begin{cases} SM \perp AB \\ SN \perp CD \Rightarrow CD \perp (SMN) \Rightarrow (SMN) \perp (ABCD). \\ CD // AB \end{cases}$$

Vì vậy, kẻ $SH \perp MN\left(H \in MN\right)$ ta có $SH \perp (ABC)$.

Tam giác SMN có $SM = d(S,AB) = 1$; $SN = d(S,CD) = \sqrt{3}, MN = 1$.

Do đó $SH = \dfrac{2S_{SMN}}{MN} = \dfrac{2.\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \sqrt{3}$. Vậy $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 54. Chọn A



Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB,CD ta có

$$\begin{cases} SM \perp AB \\ SN \perp CD \Rightarrow CD \perp (SMN) \Rightarrow (SMN) \perp (ABCD). \\ CD // AB \end{cases}$$

Vì $(SAB) \perp (SCD)$ nên tam giác SMN vuông tại S.

Diện tích tam giác SAB là $S_{SAB} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot SM$.

Diện tích tam giác SCD là $S_{SCD} = \dfrac{1}{2} \cdot CD \cdot SN$.

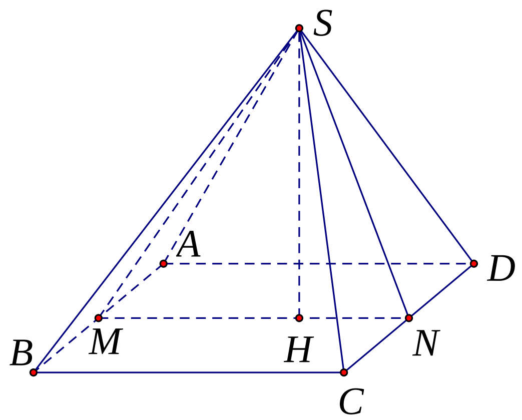
Theo đề ta có $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot SM+\frac{1}{2}\cdot CD\cdot SN=\frac{7a^2}{10}\Leftrightarrow SM+SN=\frac{7a}{5}\Rightarrow (SM+SN)^2=\frac{49a^2}{25}$.

Mặt khác, vì tam giác SMN vuông tại S nên $SM^2+SN^2=MN^2\Leftrightarrow SM^2+SN^2=a^2\Leftrightarrow (SM+SN)^2-2SM\cdot SN=a^2\Leftrightarrow SM\cdot SN=\frac{12a^2}{25}$.

Kẻ $SH\perp MN(H\in MN)$ ta có $SH\perp(ABC)$, do đó $SH=\frac{SM\cdot SN}{MN}=\frac{12a}{25}$.

Suy ra thể tích $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\cdot SH\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{12a}{25}\cdot a^2=\frac{12a^3}{75}$.

Câu 55. Chọn C



Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB,CD, khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc giữa SM và SN, suy ra $(SM,SN)=60°$.

Kẻ $SH\perp MN(H\in MN)$ ta có $SH\perp(ABC)$, do đó $SH=\frac{SM\cdot SN\cdot\sin 60°}{MN}$ $(*)$.

Diện tích tam giác SAB là $S_{SAB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot SM$.

Diện tích tam giác SCD là $S_{SCD}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot SN$.

Theo đề ta có $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot SM+\frac{1}{2}\cdot CD\cdot SN=\frac{3a^2}{4}\Leftrightarrow SM+SN=\frac{3a}{2}\Rightarrow (SM+SN)^2=\frac{9a^2}{4}$.

Theo định lý cosin trong tam giác SMN, ta có

$$MN^2=SM^2+SN^2-2SM\cdot SN\cdot\cos MSN=(SM+SN)^2-2SM\cdot SN(1+\cos MSN)$$

$$\Rightarrow SM\cdot SN=\frac{(SM+SN)^2-MN^2}{2(1+\cos MSN)}.$$

Xét các trường hợp:

Trường hợp $MSN=60°$, khi đó $SM\cdot SN=\frac{5a^2}{8\left(1+\frac{1}{2}\right)}=\frac{5a^2}{12}$.

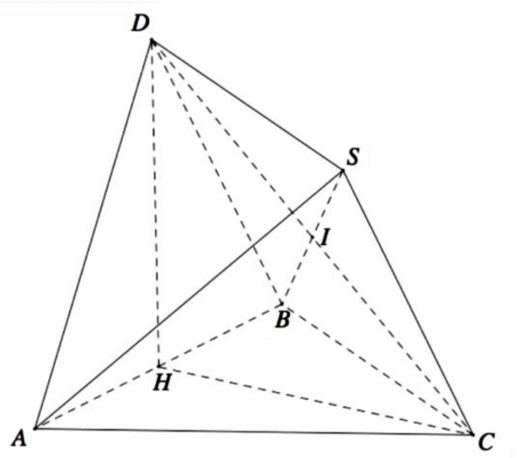
Thay vào $(*)$ ta có $SH=\frac{SM\cdot SN\cdot\sin 120°}{MN}=\frac{5\sqrt{3}a}{24}$

Suy ra thể tích $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\cdot SH\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5\sqrt{3}a}{24}\cdot a^2=\frac{5\sqrt{3}a^3}{72}$.

Trường hợp $MSN=120°$, khi đó $SM\cdot SN=\frac{5a^2}{8\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\frac{5a^2}{4}$

(vô lý vì $\frac{3a}{2}=SM+SN\ge 2\sqrt{SM\cdot SN}=\sqrt{5}$).

Câu 56. Chọn D



Gọi I,HI,H lần lượt là trung điểm của $CD,AB.CD,AB$.

Ta có $V_{ABDSC}=V_{S.ABD}+V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(d\left(S,\left(ABD\right)\right)+d\left(S,\left(ABC\right)\right)\right)$.

Trong đó. $d\left(S,\left(ABD\right)\right)=2d\left(I,\left(ABD\right)\right)=d\left(C,\left(ABD\right)\right)=CH=\frac{\sqrt{3}}{2}$

và $d\left(S,\left(ABC\right)\right)=2d\left(I,\left(ABC\right)\right)=d\left(D,\left(ABC\right)\right)=DH=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{ABDSC}=V_{S.ABD}+V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

Câu 57. Chọn D

Gọi H là trung điểm cạnh $AB\Rightarrow SH\perp AB\Rightarrow SH\perp\left(ABC\right)$ Và $SH=\frac{AB}{2}=a$.

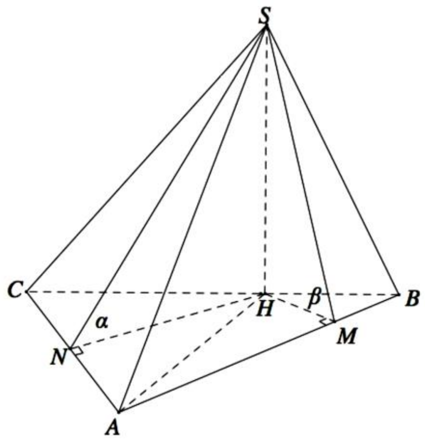
Kẻ $HM\perp BC(M\in BC),HN\perp CA(N\in CA)\Rightarrow SMH=SNH=60^0$

$\Rightarrow HM=HN=SHcot60^0=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ta có

$S_{ABC}=S_{HAC}+S_{HBC}=\frac{1}{2}\left(HM.BC+HN.CA\right)=\frac{a\sqrt{3}}{6}\left(BC+CA\right)=\frac{a\sqrt{3}}{6}\left(10a-2a\right)=\frac{4a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $V=\frac{Sh}{4}=\frac{4\sqrt{3}a^3}{9}$.

Câu 58. Chọn D



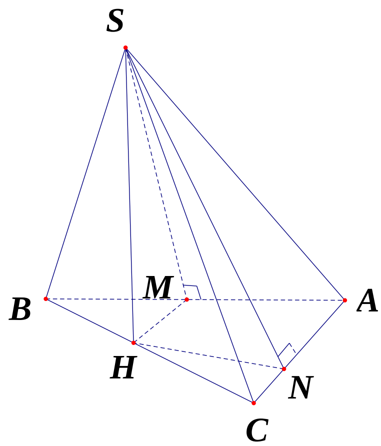
Kẻ $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$ và $HM \perp AB, HN \perp CA \Rightarrow \alpha = \angle SNH, \beta = \angle SMH$

Ta có $\frac{\sqrt{3}a^2}{4} = S_{HAB} + S_{HCA} = \frac{1}{2}(AB.HM + AC.HN) = \frac{a}{2}(SHcot\beta + SHcot\alpha)$

Do đó $SH = \frac{\sqrt{3}}{2(cot\alpha + cot\beta)} = \frac{\sqrt{3}}{2(cot\alpha + tan\alpha)} \le \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{cot\alpha.tan\alpha}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$\alpha + \beta = 90^0 \Rightarrow tan\alpha = cot\beta$. Vậy $V = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}a^2}{4}SH \le \frac{a^3}{16}$.

Câu 59. Chọn D



Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 1$.

Gọi $SH(H \in BC)$ là đường cao của SBC, theo giả thiết $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của S trên $AB, AC \Rightarrow \begin{cases} SMH = ((SAB),(ABC)) \\ SNH = ((SAC),(ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} SMH = \beta \\ SNH = \alpha \end{cases}$.

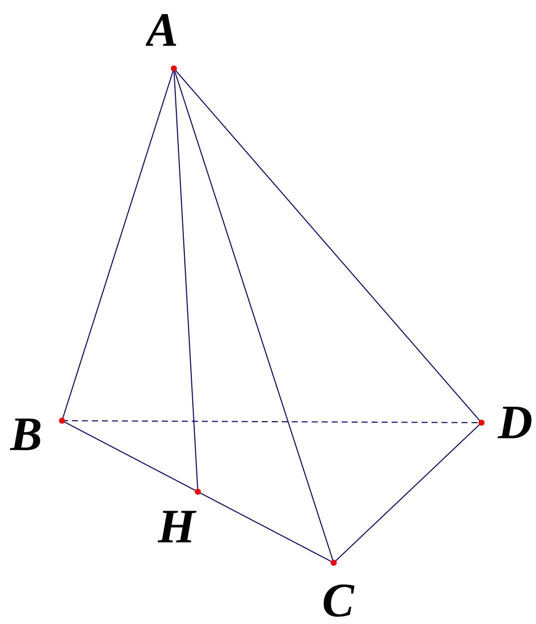
Ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AHB} + S_{\Delta AHC} = \frac{1}{2}.HM.AB + \frac{1}{2}.HN.AC = \frac{1}{2}.(SH.\cot\beta + 2.SH.\cot\alpha)$

Do đó: $SH = \frac{2}{\cot\beta + 2.\cot\alpha} = \frac{2}{2.\cot\alpha + \tan\alpha} \le \frac{2}{2\sqrt{2.\cot\alpha.\tan\alpha}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(Vì $\alpha+\beta=90^\circ$ nên $\cot\beta=\tan\alpha$)

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC}\le\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2}}{2}.1=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Câu 60. Chọn D



Gọi H là trung điểm cạnh BC.

ΔABC cân tại $A\Rightarrow AH\perp BC$ mà $(ABC)\perp(BCD)\Rightarrow AH\perp(BCD)$.

Lại có $AB=AC=AD$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCD\Rightarrow\Delta BCD$ vuông tại D.

Xét $\Delta BCD: BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{3}$

Xét ΔAHC vuông tại $H\Rightarrow AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=\sqrt{AC^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$.

Vậy $V_{ABCD}=\frac{1}{3}.AH.S_{BCD}=\frac{1}{3}.AH.\frac{1}{2}.DB.DC=\frac{1}{6}.\frac{1}{2}.1.\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

DẠNG 5 Thể tích khối chóp đều

Câu 1: Thể tích V của khối tứ diện đều có cạnh bằng a

A. $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

Câu 2: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$ Tính thể tích V khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 3: Trong tất cả các hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$, khối chóp có thể tích lớn nhất là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Câu 4: Thể tích V của khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên gấp đôi cạnh đáy

A. $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{13}a^3}{12}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{4}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{13}a^3}{4}$.

Câu 5: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$ Tính thể tích V khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 6: Khối chóp tam giác đều có cạnh bên bằng $2\sqrt{3}a$ và thể tích bằng $4\sqrt{3}a^3$. Tính chiều cao h của khối chóp đã cho.

A. $h=\sqrt{3}a$. **B.** $h=\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $h=2a$. **D.** $h=\dfrac{4a\sqrt{3}}{9}$.

Câu 7: Trong tất cả các khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{3}$, khối chóp có thể tích nhỏ nhất là?

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 8: Khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng $2\sqrt{3}a$ và thể tích bằng $4a^3$. Tính chiều cao h của khối chóp đã cho.

A. $h=4\sqrt{3}a$. **B.** $h=\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $h=4a$. **D.** $h=\dfrac{2a\sqrt{3}}{9}$.

Câu 9: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB,SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC), diện tích tam giác AMN bằng $\sqrt{10}a^2$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $\dfrac{8\sqrt{5}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{8a^3\sqrt{5}}{9}$. **C.** $8\sqrt{5}a^3$. **D.** $\dfrac{8\sqrt{5}a^3}{27}$.

Câu 10: Thể tích V của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a.

A. $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **C.** $\sqrt{2}a^3$. **D.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Câu 11: Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên có độ dài gấp đôi cạnh đáy.

A. $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{14}a^3}{2}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{14}a^3}{6}$.

Câu 12: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh SB,SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{24}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{8}$.

Câu 13: Thể tích V của khối bát diện đều có cạnh bằng a.

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$.

Câu 14: Tính thể tích V của khối tứ diện đều $ABCD$, biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng 6.

A. $V=5\sqrt{3}$. **B.** $V=\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\frac{27\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V=27\sqrt{3}$.

Câu 15: Một viên đá hình dạng khối tứ diện đều cạnh bằng a. Người ta cắt viên đá bởi mặt phẳng song song với một mặt của khối tứ diện để chia viên đá thành 2 phần có thể tích bằng nhau. Tính độ dài cạnh x của phần cắt ra có hình dạng khối tứ diện đều.

A. $x=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** $x=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$. **C.** $x=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $x=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 16: Một viên đá hình dạng khối tứ diện đều cạnh bằng a. Người ta cắt viên đá bởi mặt phẳng song song với một mặt của khối tứ diện để chia viên đá thành 2 phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện S của mặt cắt.

A. $S=\frac{\sqrt{3}a^2}{16}$. **B.** $S=\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$. **C.** $S=\frac{\sqrt{3}a^2}{4\sqrt[3]{4}}$. **D.** $S=\frac{\sqrt{3}a^2}{4\sqrt[3]{2}}$.

Câu 17: Một viên đá hình dạng khối tứ diện đều cạnh bằng a. Người ta cắt viên đá bởi các mặt phẳng song song với mặt của khối tứ diện để chia viên đá thành 5 phần, trong đó có 4 phần là các khối tứ diện bằng nhau, tổng thể tích của 4 khối tứ diện này bằng một nửa thể tích của viên đá ban đầu. Tính độ dài cạnh của 4 khối tứ diện đó.

A. $x=\frac{a}{2}$. **B.** $x=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$. **C.** $x=\frac{a}{4}$. **D.** $x=\frac{a}{\sqrt[3]{4}}$.

Câu 18: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trọng tâm các mặt của khối tứ diện đã cho. Tính thể tích V của khối tứ diện $MNPQ$.

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{108}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{324}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{81}$.

Câu 19: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có chiều cao h. Từ ba đỉnh A, B, D của tứ diện người ta cắt ba khối tứ diện đều có cùng chiều cao h'. Biết rằng thể tích của khối đa diện còn lại bằng một nửa thể tích của khối đa diện ban đầu. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $h' = \dfrac{h}{3}$. **B.** $h' = \dfrac{h}{\sqrt[3]{6}}$. **C.** $h' = \dfrac{h}{2\sqrt{2}}$. **D.** $h' = \dfrac{h}{\sqrt[3]{3}}$.

Câu 20: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0 Gọi $A';B';C'$ lần lượt là các điểm đối xướng với $A;B;C$ qua S. Tính thể tích của khối bát diện có các mặt là $ABC; A'B'C'; ABC; A'BC; AB'C; AB'C'; BA'C'; CA'B'$;

A. $V = \dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $V = 2\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 21: Tính thể tích V của khối chóp lục giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp đôi cạnh đáy.

A. $V = \dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{4}$. **C.** $V = \dfrac{9a^3}{2}$. **D.** $V = \dfrac{3a^3}{2}$.

Câu 22: Kim tự tháp Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công Nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 147 m, cạnh đáy dài 230 m. Thể tích của khối chóp đó là

A. $2592100\,m^3$. **B.** $7776300\,m^3$. **C.** $2592300\,m^3$. **D.** $3888150\,m^3$.

Câu 23: Một viên đá hình dạng khối chóp tứ giác đều tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a. Người ta khối đá bởi mặt phẳng song song với đáy khối chóp để chia khối đá thành 2 phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích S của mặt cắt.

A. $S = \dfrac{2a^2}{\sqrt{3}}$. **B.** $S = \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$. **C.** $S = \dfrac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. **D.** $S = \dfrac{a^2}{4}$.

Câu 24: Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt đáy góc $60°$

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 25: Thể tích V của khối chóp tứ giác đều có các cạnh đều bằng a

A. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$

Câu 26: Tính thể tích V của khối chóp lục giác đều $S.ABCDEF$ có $AB = 3, SA = 5$.

A. $V = 45\sqrt{3}$. **B.** $V = 18\sqrt{3}$. **C.** $V = 54\sqrt{3}$. **D.** $V = 15\sqrt{3}$.

Câu 27: Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với mặt đáy góc $60°$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 28: Khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích V. Khối bát diện đều có các đỉnh là trung điểm các cạnh của khối tứ diện đều có thể tích V'. Tính tỉ số $\dfrac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{V'}{V}=\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{V'}{V}=\frac{5}{8}$. **D.** $\frac{V'}{V}=\frac{1}{4}$.

Câu 29: Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau và đường cao mặt bên bằng $a\sqrt{3}$.

A. $V=a^3\sqrt{2}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $V=\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 30: Người ta gọt một khối lập phương có thể tích V để được một khối bát diện đều (tức là khối có các đỉnh là tâm các mặt của khối lập phương đó) có thể tích V'. Tính tỷ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V}=\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{V'}{V}=\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{V'}{V}=\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{V'}{V}=\frac{1}{12}$.

Câu 31: Cho khối tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Biết tứ giác $MNPQ$ có diện tích bằng 1. Tính thể tích V của khối tứ diện đều đã cho.

A. $V=\frac{\sqrt{11}}{24}$. **B.** $V=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{2}}{24}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{11}}{6}$.

Câu 32: Một khối chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b, chiều cao h. Tính thể tích V của khối chóp tam giác đều đã cho.

A. $V=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(b^2-h^2\right)h$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(b^2-h^2\right)b$.

C. $V=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(b^2-h^2\right)h$. **D.** $V=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(b^2-h^2\right)b$.

Câu 33: Trong tất cả các khối chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng $2a\sqrt{3}$, khối chóp có thể tích lớn nhất là?

A. $\frac{32a^3}{3}$. **B.** $2\sqrt{2}a^3$. **C.** $6\sqrt{2}a^3$. **D.** $32a^3$.

Câu 34: Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$, tính độ dài cạnh đáy khi khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 35: Trong tất cả các khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2\sqrt{3}$. Khối chóp có thể tích nhỏ nhất là?

A. 18. **B.** 54. **C.** 9. **D.** 27.

Câu 36: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh bằng 16. Xét hình chữ nhật $MNPQ$ nội tiếp đáy ABC với $M,N\in BC$, $P\in AC$, $Q\in AB$. Thể tích khối chóp $S.MNPQ$ có giá trị lớn nhất là?

A. $\frac{512\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{512\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{512\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{512\sqrt{3}}{2}$.

Câu 37: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng 2. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB,SC. Tính thể tích V của khối chóp biết $CM\perp BN$.

A. $\dfrac{\sqrt{26}}{3}$. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{26}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

Câu 38: Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau là a và có thể tích $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. Tính chiều cao h của khối chóp tứ giác đều đã cho.

A. $h=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 39: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh SC và SD. Biết mặt phẳng $(ABMN)$ vuông góc với mặt phẳng (SCD). Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 40: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh SC và SD. Biết mặt phẳng $(ABMN)$ vuông góc với mặt phẳng (SCD), diện tích tứ giác $ABMN$ bằng $2\sqrt{3}a^2$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{32a^3}{9}$. **B.** $V=\dfrac{32a^3}{3}$. **C.** $V=\dfrac{16a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V=\dfrac{32a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 41: Trong các hình chóp tam giác đều có khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là d. Khối chóp có thể tích nhỏ nhất là?

A. d^3. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}d^3}{3}$. **C.** $\dfrac{d^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}d^3}{9}$.

Câu 42: Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích tứ diện đều cạnh a, khối bất diện đều cạnh a. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=2$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=4$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 43: Cho khối chóp tam giác đều có chiều cao là $6a$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA,BC là a. Thể tích V của khối chop là

A. $V=\dfrac{27a^3\sqrt{3}}{10}$. **B.** $V=\dfrac{81a^3\sqrt{3}}{40}$. **C.** $V=\dfrac{81a^3\sqrt{3}}{10}$. **D.** $V=\dfrac{27a^3\sqrt{3}}{40}$.

Câu 44: Cho tứ diện đều cạnh a. Gọi h là tổng khoảng cách từ một điểm trong của khối tứ diện lên các mặt của nó. Tìm mệnh đề đúng.

A. $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$. **C.** $h=\dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $h=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 45: Cho khối bát diện đều cạnh a. Gọi h là tổng khoảng cách từ một điểm trong của khối tứ diện lên các mặt của nó. Tìm mệnh đề đúng.

A. $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$. **C.** $h=\dfrac{4a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $h=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 46: Tìm Trong cách khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên là $2\sqrt{3}$, khối chóp có thể tích lớn nhất là

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 47: Trong cách khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có khoảng cách từ A đến (SBC) là 3, khối chóp có thể tích nhỏ nhất là

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 48: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng *a*. Gọi A',B',C',D' lần lượt là các điểm đối xứng của A,B,C,D qua S. Tính thể tích V của khối đa diện có sáu mặt $(ABCD),(A'B'C'D'),(BCA'D'),(ADB'C'),(CDB'A'),(ABD'C')$.

A. $V=2\sqrt{2}a^3$. **B.** $V=\sqrt{2}a^3$. **C.** $V=\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{8\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 49: Một khối bát diện dều cạnh a. Ngoại tiếp bát diện đều bởi một khối lập phương sao cho các đỉnh của khối bát diện đều là tâm các mặt của khối lập phương. Tính thể tích khối lập phương.

A. $V=\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $V=2\sqrt{2}a^3$. **C.** $V=4\sqrt{2}a^3$. **D.** $V=\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 50: Cho khối tứ diện đều (H) có cạnh bằng *1*. Qua mỗi cạnh của (H) dựng một mặt phẳng không chứa các điểm trong của (H) và tạo với hai mặt phẳng của (H) đi qua cạnh đó những góc bằng nhau. Các mặt phẳng như thế giới hạn một đa giác (H'). Tính thể tích của (H')**.**

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Câu 51: Khối tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng 1. Khối lập phương có một mặt nằm trên mặt đáy của khối chóp tứ giác đều và tất cả các cạnh còn lại của mặt đối diện nằm trên các mặt bên của khối chóp tứ giác đều. Tính thể tích V của hình lập phương.

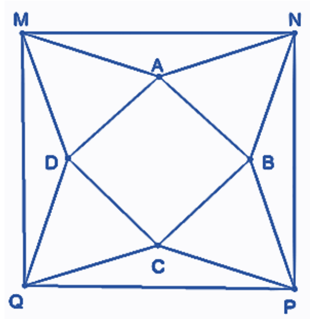
A. $V=5\sqrt{2}-7$. **B.** $V=6\sqrt{3}-10$. **C.** $V=\frac{5\sqrt{2}-7}{3}$. **D.** $V=\frac{6\sqrt{3}-10}{3}$.

Câu 52: Một khối tứ diện đều (H) có cạnh bằng 1. Khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau, có mặt đáy nằm trên một mặt của khối tứ diện (H) và tất cả các cạnh còn lại của mặt đối diện nằm trên các mặt còn lại của khối tứ diện (H). Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác đều đó.

A. $V=\frac{27\sqrt{2}-22\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\frac{45\sqrt{6}-58\sqrt{3}}{686}$.

C. $V=\frac{27\sqrt{2}-22\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V=\frac{9\sqrt{6}-22}{2}$.

Câu 53: Từ một miếng tôn hình vuông cạnh 50 cm, người ta cắt đi bốn tam giác cân bằng nhau MAN, NBP, PCQ, QDM sau đó gò các tam giác cân ABN, BCP, CDQ, DAM sao cho các đỉnh M N, P, Q trùng nhau để được khối chóp tứ giác đuuè. Khối chóp tứ giác đều có thể tích lớn nhất là



A. $\dfrac{15625}{6}$ cm^3. **B.** $\dfrac{15625}{2}$ cm^3. **C.** $\dfrac{4000\sqrt{10}}{3}$ cm^3. **D.** $\dfrac{4000\sqrt{10}}{9}$ cm^3.

Câu 54: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, mặt phẳng chứa BC và vuông góc với SA cắt khối chóp theo một thiết diện có diện tích bằng $\dfrac{a^2}{4}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{24}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{36}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{72}$.

Câu 55: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng α, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Tính $\tan\alpha$, khi thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$. **B.** $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$. **C.** $\tan\alpha=\sqrt{2}$. **D.** $\tan\alpha=3$.

Câu 56: Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh bằng $1+\sqrt{3}$, người ta cắt tấm tôn theo các tam giác cân bằng nhau MAN, NBP, PCQ, QDM sau đó gò các tam giác cân ABN, BCP, CDQ, DAM sao cho các đỉnh M, N, P, Q trùng nhau để được khối chóp tứ giác đều. Biết góc ở đỉnh của tam giác cân bị cắt đi là 150^0. Tính thể tích V khối chóp tứ giác đều tạo thành.

A. $V=\dfrac{3\sqrt{6}+5\sqrt{2}}{24}$. **B.** $V=\dfrac{2}{3}$. **C.** $V=\dfrac{5\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\dfrac{2}{9}$.

Câu 57: Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh bằng a, người ta cắt đi bốn tam giác cân bằng nhau MAN, NBP, PCQ, QDM sau đó gò các tam giác cân ABN, BCP, CDQ, DAM sao cho các đỉnh M, N, P, Q trùng nhau để được khối chóp tứ giác đều. Khối chóp tứ giác đều có thể tích lớn nhất là?

A. $\dfrac{a^3}{48}$. **B.** $\dfrac{a^3}{16}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{10}a^3}{375}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{10}a^3}{125}$.

Câu 58: Một khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có m là tan góc giữa cạnh bên và mặt đáy. Người ta tăng cạnh hình vuông mặt đáy gấp đôi nhưng muốn giữ nguyên thể tích khối chóp nên đã thay đổi đồng thời chiều cao cho phù hợp. Hỏi giá trị của m thay đổi như thế nào?

A. Giảm 2 lần. **B.** Tăng 2 lần. **C.** Giảm 8 lần. **D.** Tăng 8 lần.

Câu 59: Khối tứ diện đều (H) có cạnh bằng 1. Khối lăng trụ tam giác đều có mặt đáy nằm trên một mặt của khối tứ diện (H) và tất cả các cạnh còn lại của mặt đáy đối diện nằm trên các mặt còn lại của khối tứ diện (H). Tính thể tích lớn nhất của khối lăng trụ tam giác đều đó.

A. $\frac{\sqrt{2}}{27}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{48}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{18}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{16}$.

Câu 60: Khối tứ diện đều (H) có tất cả các cạnh bằng 1. Khối hộp chữ nhật (H') có một mặt nằm trên mặt đáy của (H) và tất cả các cạnh còn lại của mặt đáy đối diện nằm trên các mặt bên của (H) Tìm thể tích lớn nhất của (H').

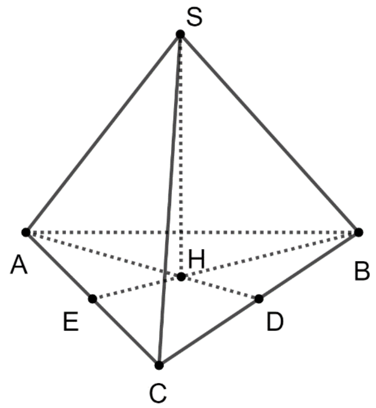
A. $5\sqrt{2}-7$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}}{27}$. **C.** $\frac{4\sqrt{2}}{27}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{27}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2. C	3. A	4. A	5. A	6.C	7. A	8. B	9. A	10.B
11. D	12.A.	13.B.	14.D.	15.D.	16.C	17.A.	18.C	19.B	20.A
21.D	22.A	23.C	24.C.	25.B	26.B	27.D	28.A	29.C	30.B
31.B	32.A	33.A	34.B	35.A	36.A	37.A	38.C	39.D	40.A
41.C	42.D	43.D	44.A	45.C	46.C	47.B	48.B	49.B	50.A
51.A	52.C	53.C	54.A	55.A	56.B	57.C	58.C	59.A	60.B

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

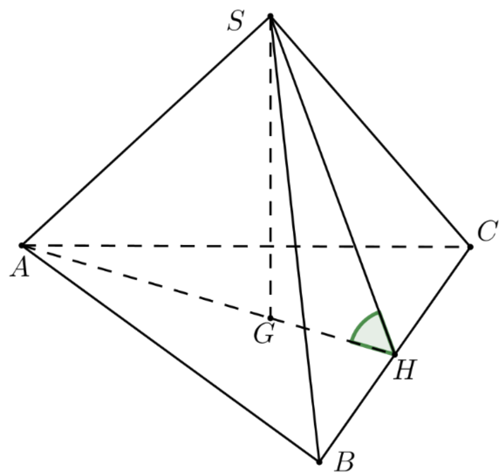


Gọi H là tâm của tam giác đều ABC. Ta có $SH \perp (ABC)$ và $BH = \dfrac{2}{3}AE = \dfrac{2}{3}a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

$V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}a\dfrac{\sqrt{6}}{3}.a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$.

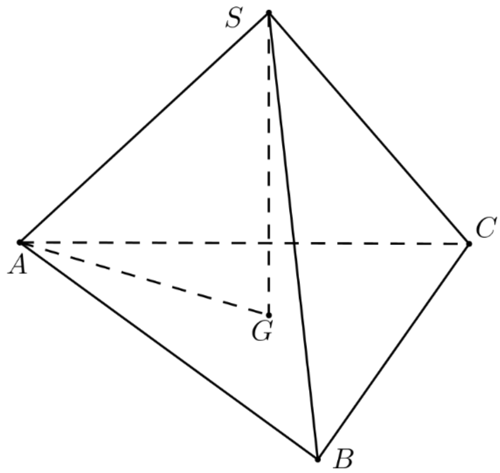
Câu 2: Chọn C



Ta có $((SBC);(ABC)) = SHG = 60^\circ \Rightarrow SG = GH.\tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SG = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 3: **Chọn A**



Xét hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$, cạnh đáy $AB = x$.

Ta có $SA^2 = SG^2 + AG^2 \Rightarrow SG = \sqrt{3a^2 - \dfrac{x^2}{3}} = \sqrt{\dfrac{9a^2 - x^2}{3}}$.

Do đó $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}.\sqrt{\dfrac{9a^2 - x^2}{3}} = \dfrac{1}{12}.x^2\sqrt{9a^2 - x^2}$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = x^2\sqrt{9a^2 - x^2}$ trên $\left(0;3a\right)$.

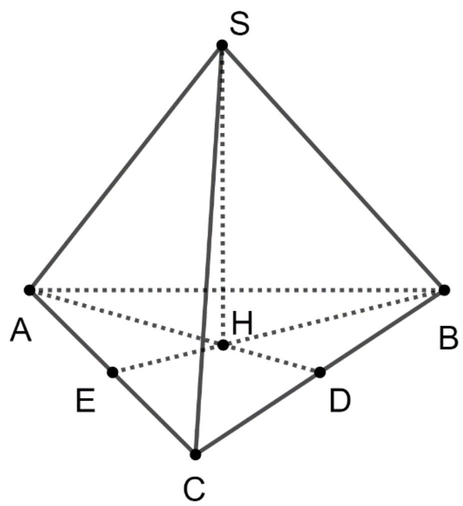
$f'\left(x\right) = 2x\sqrt{9a^2 - x^2} - \dfrac{x^3}{\sqrt{9a^2 - x^2}} = \dfrac{18a^2x - 3x^3}{\sqrt{9a^2 - x^2}}$.

$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a\sqrt{6} \end{array}\right.$.

$f\left(0\right) = f\left(3a\right) = 0$, $f\left(a\sqrt{6}\right) = 6a^3\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp lớn nhất là $V = \dfrac{1}{12}.6a^3\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4: **Chọn A**

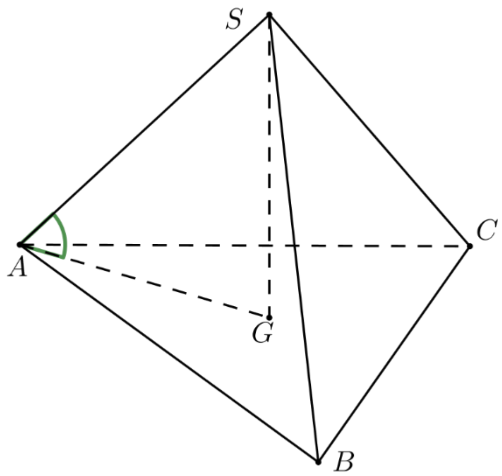


Gọi H là tâm của tam giác đều ABC. Ta có $SH \perp \left(ABC\right)$ và $BH = \dfrac{2}{3}AE = \dfrac{2}{3}a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

$SH=\sqrt{SB^2-BH^2}=\frac{\sqrt{33}}{3}a$.

$V_{SABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}a\frac{\sqrt{33}}{3}.a^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{11}}{12}a^3$.

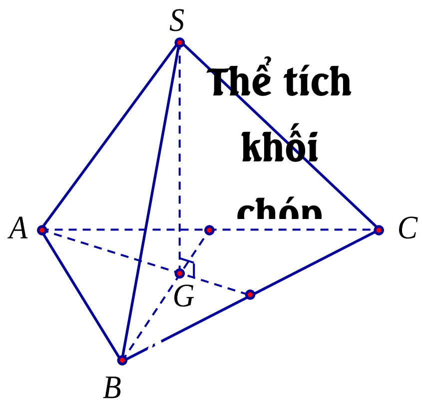
Câu 5: Chọn A



Ta có $\left(SA;\left(ABC\right)\right)=SAG=60^\circ\Rightarrow SG=AH.\tan 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3}=a$.

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}.SG=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 6: Chọn C



Gọi x là độ dài các cạnh đáy của tam giác ABC. Diện tích tam giác ABC là $B=\frac{\sqrt{3}x^2}{4}$.

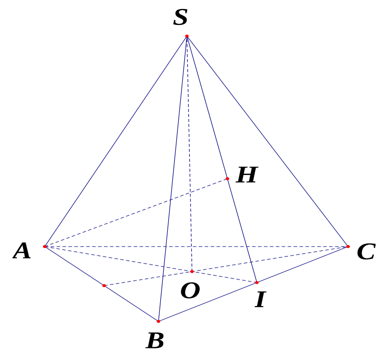
$V=\frac{1}{3}Bh\Rightarrow h=\frac{3V}{B}=\frac{48a^3}{x^2}\Rightarrow h.x^2=48a^3$ (1).

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC\Rightarrow SG\perp\left(ABC\right)\Rightarrow\Delta SGA$ vuông tại G, $AG=\frac{x\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow h=SG=\sqrt{SA^2-AG^2}\Rightarrow 12a^2-\frac{x^2}{3}=h^2\Rightarrow x^2=3\left(12a^2-h^2\right)$(2).

Từ (1) và (2) $16a^3-12a^2h+h^3=0\Rightarrow h=2a$.

Câu 7: Chọn A



Cách 1: Gọi I là trung điểm của BC. Khi đó $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=AH=a\sqrt{3}$

Gọi cạnh của tam giác đều ABC là $x\left(x>0\right)\Rightarrow AI=\dfrac{x\sqrt{3}}{2};AO=OB=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SOI đồng dạng với tam giác AHI nên $\dfrac{IO}{IH}=\dfrac{IS}{IA}$ mà $IH=\sqrt{\dfrac{3}{4}x^2-3a^2}$

$\Rightarrow SI=\dfrac{IO.IA}{IH}=\dfrac{x^2}{2\sqrt{3x^2-12a^2}}$.

Xét tam giác SOI vuông tại O ta có:

$$SO=\sqrt{SI^2-OI^2}=\sqrt{\frac{x^4}{4\left(3x^2-12a^2\right)}-\frac{3x^2}{36}}=\sqrt{\frac{x^2a^2}{\left(3x^2-12a^2\right)}}=\frac{xa}{\sqrt{3x^2-12a^2}}.$$

Vậy thể tích khối chóp $V=\dfrac{1}{3}SO.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{xa}{\sqrt{3x^2-12a^2}}.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}.\dfrac{x}{\sqrt{3x^2-12}}.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$ trên khoảng $\left(2;4\right)$ ta có $\min f(\text{x})=f(\dfrac{5}{2})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy khối chóp có thể tích nhỏ nhất là $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Cách 2: Gọi α là góc tạo bởi mặt bên và đáy $\left(ABC\right)$.

Gọi O là tâm tam giác ABC.

Gọi I là trung điểm của $BC\Rightarrow$ góc SAI bằng α.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên $SI\Rightarrow AH\perp\left(SBC\right)$

$\Rightarrow d\left(\text{A};\left(SBC\right)\right)=AH$.

Xét tam giác vuông AHI ta có : $\sin\alpha=\dfrac{AH}{AI}\Rightarrow AI=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sin\alpha}\Rightarrow BC=\dfrac{2a}{\sin\alpha}$.

Suy ra $OI=\dfrac{1}{3}AI=\dfrac{a\sqrt{3}}{3\sin\alpha}$; $SO=OI.\tan\alpha=\dfrac{a\sqrt{3}}{3\cos\alpha}$ nên suy ra

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SO.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3\cos\alpha}.\frac{1}{2}\frac{2a}{\sin\alpha}.\frac{a\sqrt{3}}{\sin\alpha}=\frac{a^3}{3}.\frac{1}{\cos\alpha-\cos^3\alpha}$$

Để $V_{\min}\Leftrightarrow f\left(\alpha\right)=\cos\alpha-\cos^3\alpha,\alpha\in\left(o;\dfrac{\pi}{2}\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Đặt $t=\cos\alpha\Rightarrow t\in\left(0;1\right)\Rightarrow f\left(t\right)=t-t^3\Rightarrow f'\left(t\right)=1-3t^2=0$

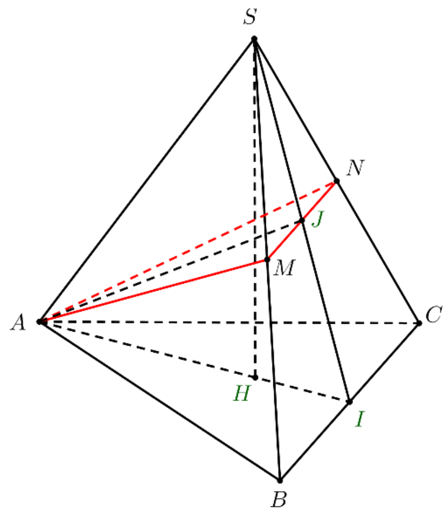
$\Leftrightarrow t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Suy ra $\max f(t)=f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.Vậy $V_{\min}=\dfrac{a^3}{3}.\dfrac{9}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^3$.

Câu 8: Chọn B

Diện tích tam giác đáy là $B=\dfrac{1}{2}.\left(2\sqrt{3}a\right)^2.\sin 60^0=3\sqrt{3}a^2$.

Ta có: $V=\dfrac{1}{3}Bh\Rightarrow h=\dfrac{3V}{B}=\dfrac{12a^3}{3\sqrt{3}a}=\dfrac{4\sqrt{3}a}{3}$.

Câu 9: Chọn A



Gọi H là tâm của tam giác $ABC\Rightarrow SH\perp(ABC)$

Gọi I là trung điểm của BC. Gọi $J=MN\cap SI$,

Giả sử $AB=x$. Theo giả thiết $AJ\perp SI$ và J là trung điểm của SI nên tam giác SAI cân tại A

$\Rightarrow SB=SA=AI=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SBI vuông tại I

$\Rightarrow SI=\sqrt{SB^2-BI^2}=\sqrt{\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{x\sqrt{2}}{2}$

Ta có $MN=\dfrac{x}{2};AJ=\sqrt{AI^2-\left(\dfrac{SI}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2-\dfrac{x^2}{8}}=\dfrac{x\sqrt{10}}{4}$

$S_{AMN}=\dfrac{1}{2}.JA.MN=\dfrac{1}{2}.\dfrac{x\sqrt{10}}{4}.\dfrac{x}{2}=a^2\sqrt{10}\Rightarrow x=4a$

Tam giác SAH vuông tại H $\Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{\left(2a\sqrt{3}\right)^2-\left(\dfrac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\dfrac{2a\sqrt{15}}{3}$

$V=\dfrac{1}{3}.SH.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{2a\sqrt{15}}{3}.\dfrac{(4a)^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{8a^3\sqrt{5}}{3}$.

Câu 10: Chọn B

Giả sử $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều, O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Khi đó:

$S_{ABCD}=a^2$,

$h=SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.h=\dfrac{1}{3}a^2\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

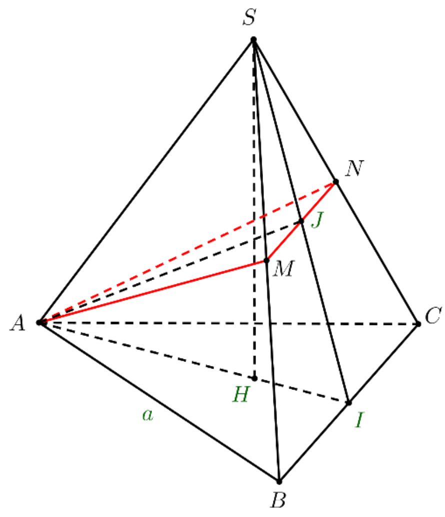
Câu 11: Chọn D

Giả sử $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều, O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Khi đó: $S_{ABCD}=a^2$,

$h=SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{14}}{2}\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.h=\dfrac{1}{3}a^2\dfrac{a\sqrt{14}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{14}}{6}$.

Câu 12: Chọn A



Gọi H là tâm của tam giác $ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi $J = MN \cap SI$, Theo giả thiết $AJ \perp SI$ và J là trung điểm của SI nên tam giác SAI cân tại A Khi đó, $SA = IA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SAH vuông tại H

$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$

$$V = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{15}}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{5}}{24}.$$

Câu 13: Chọn B

Giả sử $SABCDE$ là khối bát diện đều có cạnh bằng a và O là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi đó:

$S_{ABCD} = a^2$,

$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(a)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}a^2\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

$\Rightarrow V_{SABCDE} = 2.V_{S.ABCD} = 2.\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

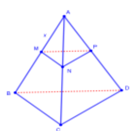
Câu 14: Chọn D

Giả sử $ABCD$ là khối tứ diện đều cạnh a và có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng 6, O là tâm của tam giác BCD.

Ta có $h = AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = 6 \Rightarrow a = 3\sqrt{6}$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}S_{BCD}.AO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.AO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\left(3\sqrt{6}\right)^2\sqrt{3}}{4}.6 = 27\sqrt{3}$.

Câu 15: Chọn D



Thể tích viên đá ban đầu là $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Phần cắt ra có hình dạng khối tứ diện đều cạnh bằng x có thể tích $V'=\frac{\sqrt{2}x^3}{12}$.

Theo giả thiết, ta có $V'=\frac{V}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}x^3}{12}=\frac{\sqrt{2}a^3}{24}\Leftrightarrow x=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$

Câu 16: Chọn C

Thể tích viên đá ban đầu là $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Phần cắt ra có hình dạng khối tứ diện đều cạnh bằng x có $V'=\frac{\sqrt{2}x^3}{12}$.

Theo giả thiết, ta có $V'=\frac{V}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}x^3}{12}=\frac{\sqrt{2}a^3}{24}\Leftrightarrow x=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$

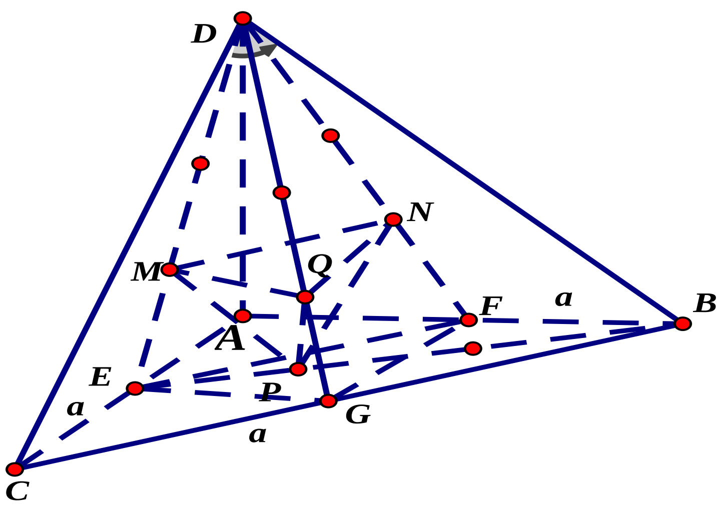
Do đó diện tích mặt cắt là $S=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}a^2}{4\sqrt[3]{4}}$.

Câu 17: Chọn A

Gọi độ dài cạnh của 4 khối tứ diện nhỏ là x, thể tích của mỗi khối nhỏ này là $\frac{\sqrt{2}x^3}{12}$.

Theo giả thiết ta có $4\left(\frac{\sqrt{2}x^3}{12}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}a^3}{12}\right)\Leftrightarrow x=\frac{a}{2}$.

Câu 18: Chọn C



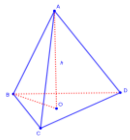
Ta có $MN=\frac{2}{3}EF=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}CB=\frac{a}{3}$. Tương tự $MQ=QN=NP=MP=QP=\frac{a}{6}$.

Xét tứ diện $ABCD$:

$$S_{BCD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}, h=\sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow V=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\Rightarrow V_{MNPQ}=\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^3\sqrt{2}}{12}=\frac{a^3\sqrt{2}}{324}$$

Câu 19: Chọn B



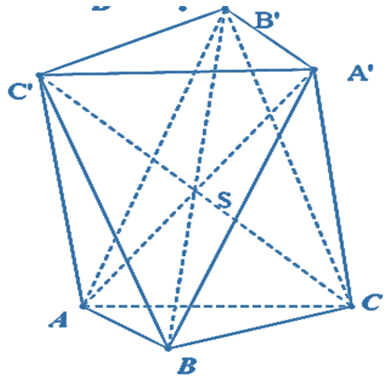
Gọi O là tâm của $\Delta BCD \Rightarrow AO \perp (BCD)$. Giả sử $AB = x$.

Xét ΔABO có $\Rightarrow h^2 = x^2 - \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2x^2}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}h$. Ta có $V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}x^3}{12} = \frac{\sqrt{3}h^3}{8}$.

Tương tự, thể tích 3 khối tứ diện đều chiều cao h' và $V' = 3\left(\frac{\sqrt{3}h'^3}{8}\right)$.

Theo giả thiết, ta có $V' = \frac{V}{2} \Leftrightarrow h'^3 = \frac{h^3}{6} \Leftrightarrow h' = \frac{h}{\sqrt[3]{6}}$

Câu 20: Chọn A



Thể tích V của khối bát diện là $V = 8V_{SABC} = 8\left(\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 21: Chọn D

Ta có: $S = 6\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

Độ dài chiều cao của khối chóp $h = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

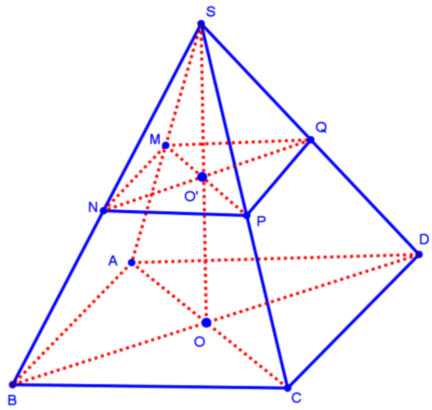
Khi đó, thể tích V của khối chóp lục giác đều là $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}.a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{2}$.

Câu 22: Chọn A

Đáy là hình vuông cạnh dài 230 m nên diện tích đáy là $S = 230^2 = 52900\left(m^2\right)$.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}.S.h = \frac{1}{3}.52900.147 = 2592100\left(m^3\right)$.

Câu 23: Chọn C



Ta có $SO\perp(ABCD)$

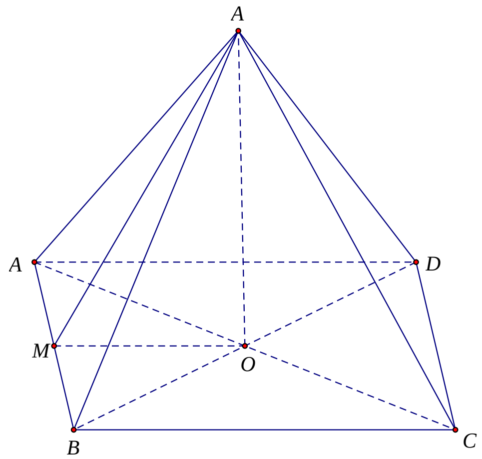
Xét ΔSOD có $SO^2=SD^2-OD^2=a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow SO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$V=V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2}}{2}a^3=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$.

Phần cắt ra có hình dạng khối chóp tứ giác đều $S.MNPQ$ có tất cả các cạnh bằng x có thể tích $V'=\frac{\sqrt{2}x^3}{6}$. Ta có $V'=\frac{V}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{6}x^3=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3\Leftrightarrow x=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$. Diện tích S của mặt cắt là $S=\frac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$.

Câu 24: Chọn C



Xét khối chóp tứ giác đều *S.ABCD*, gọi *O* là tâm giao điểm *AC* và *BD*, *M* là trung điểm của ***AB***. Ta có $SO\perp(ABCD)$. Góc tạo bởi mặt bên (*SAB*) và mặt đáy là $SMO=60°$.

Ta có $SO=MO.\tan SAC=\frac{a}{2}.\tan 60°=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp *S.ABCD* là

$$V=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO=\frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

TYPS: Gọi α là góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy, ta có $V=\frac{a^3}{6}\tan\alpha$.

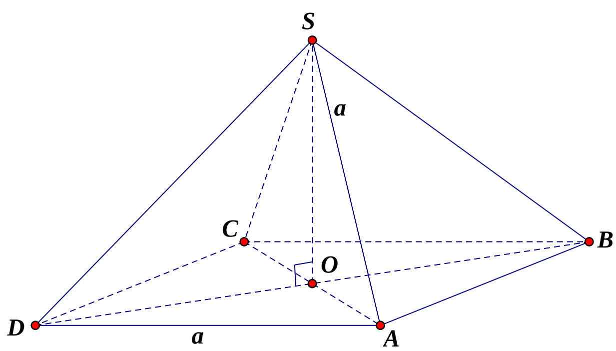
Câu 25: Chọn B

Xét khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=a$, $SA=a$.

Gọi $O=AC\cap BD$, ta có $SO\perp(ABCD)$.

$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là



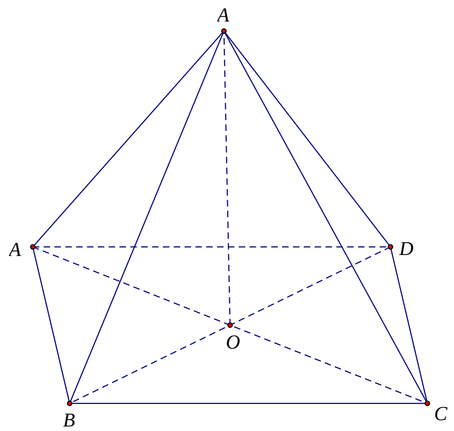
$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 26: Chọn B

Gọi O là tâm lục giác $ABCDEF$. Ta có: $SA = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{SA^2 - AB^2} = 4$.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}.SO.V_{ABCDEF} = \frac{1}{3}.4.6.\frac{\sqrt{3}}{4}.3^2 = 18\sqrt{3}$.

Câu 27: Chọn D



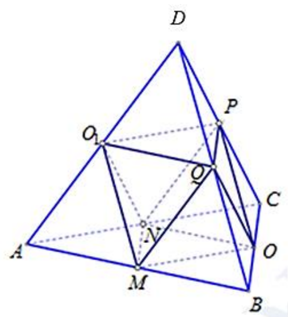
Xét khối chóp tứ giác đều *S.ABCD*, gọi *O* là tâm giao điểm *AC* và *BD*. Ta có $SO \perp (ABCD)$. Góc tạo bởi cạnh bên *SA* và mặt đáy là $SAO = 60°$. Ta có $SO = AO.\tan SAC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\tan 60° = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối chóp *S.ABCD* là

$$V = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

TYPS: Gọi α là góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy, ta có $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}\tan\alpha$.

Câu 28: Chọn A

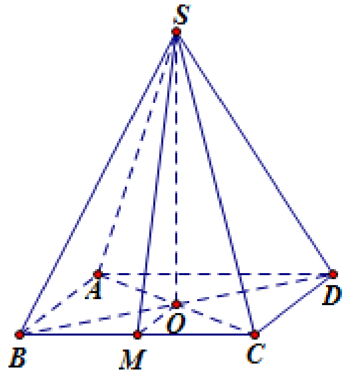


Gọi độ dài cạnh của tứ diện đều là a, suy ra thể tích khối tứ diện đều $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Ta có $MQ = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$ là độ dài cạnh của bát diện đều. Suy ra $V' = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3.\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Vậy $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

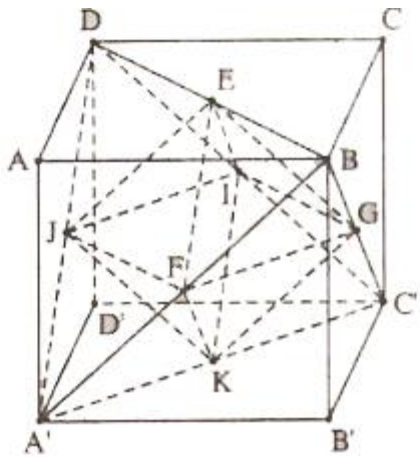
Câu 29: Chọn C



Theo giả thiết ta có ΔSBC đều và $SM = a\sqrt{3} = BC.\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = 2a$. Mặt khác $OM = \dfrac{1}{2}CD = a$ nên từ tam giác vuông $SOM \Rightarrow SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}.(2a)^2.a\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 30: Chọn B

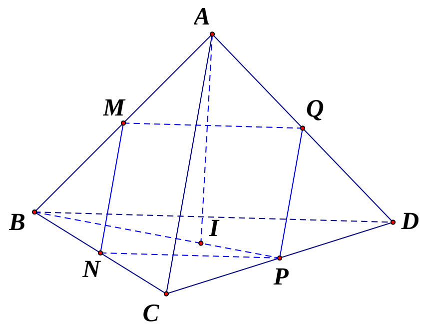


Gọi cạnh hình lập phương là a. Suy ra thể tích khối lập phương là $V = a^3$.

Ta có $EJ = \dfrac{1}{2}A'B = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ là cạnh của bát diện đều.

Suy ra thể tích $V' = \dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3\sqrt{2}}{3} = \dfrac{a^3}{6}$ nên ta có $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{6}$.

Câu 31: Chọn B



Do $ABCD$ là tứ diện đều nên $MNPQ$ là hình vuông.

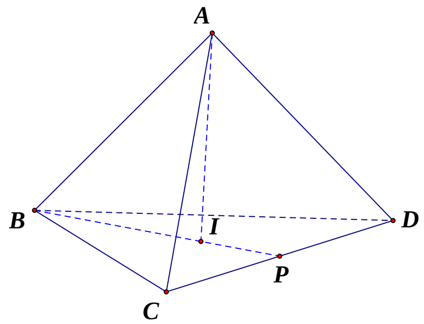
Do diện tích $MNPQ$ bằng 1 nên $MN = 1$ $\Rightarrow$ Tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng 2.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD ta có $V=\frac{1}{3}AI.dt\left(BCD\right)$.

$dt\left(BCD\right)=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$, $AI=\sqrt{AB^2-BI^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2.\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

Vậy thể tích của tứ diện $ABCD$ là $V=\frac{1}{3}\frac{2\sqrt{6}}{3}\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 32: Chọn A



Giả sử hình chóp tam giác đều là $A.BCD$.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD ta có $V=\frac{1}{3}AI.dt\left(BCD\right)$.

$BI=\sqrt{b^2-h^2}$, mà $BI=BC\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow BC=BI\sqrt{3}=\sqrt{3b^2-3h^2}$.

$dt\left(BCD\right)=\frac{BC^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\left(b^2-h^2\right)}{4}\sqrt{3}\Rightarrow V=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(b^2-h^2\right)h$

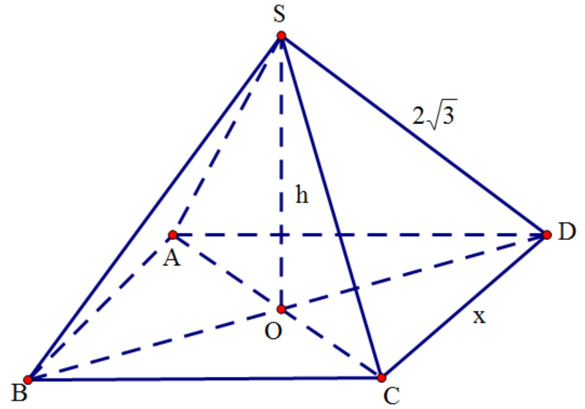
Câu 33: Chọn A

Gọi độ dài cạnh đáy là $S.ABC$, ta có $S=x^2$ và $h=\sqrt{\left(2a\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{24a^2-x^2}}{\sqrt{2}}$.

Do đó $V=\frac{Sh}{3}=\frac{x^2\sqrt{24a^2-x^2}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{x^2x^2\left(48a^2-2x^2\right)}}{6}\le\frac{\sqrt{\left(\frac{x^2+x^2+48a^2-2x^2}{3}\right)^3}}{6}=\frac{32a^3}{3}$.

Dấu bằng đạt tại $x^2=48a^2-2x^2\Leftrightarrow x=4a$.

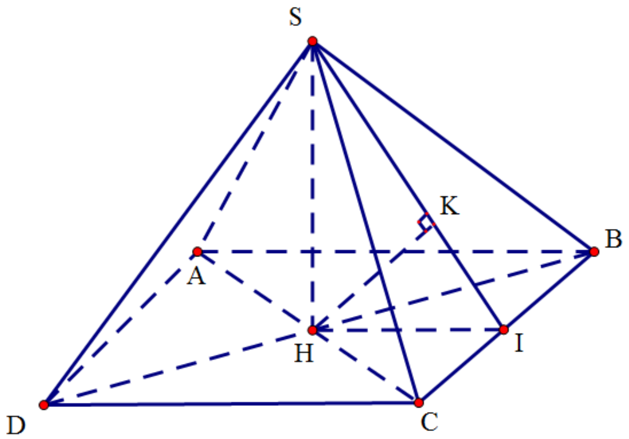
Câu 34: Chọn B



Gọi cạnh đáy là $x\left(x>0\right)$ khi đó chiều cao hình chóp $SO=\sqrt{SD^2-OD^2}=\sqrt{12-\dfrac{x^2}{2}}$. Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\sqrt{12-\dfrac{x^2}{2}}.x^2=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{24x^2-x^4}=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{144-\left(x^2-12\right)^2}\le 2\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối chóp lớp nhất bằng $2\sqrt{2}$ khi $x^2-12=0\Rightarrow x=2\sqrt{3}$.

Câu 35: Chọn A



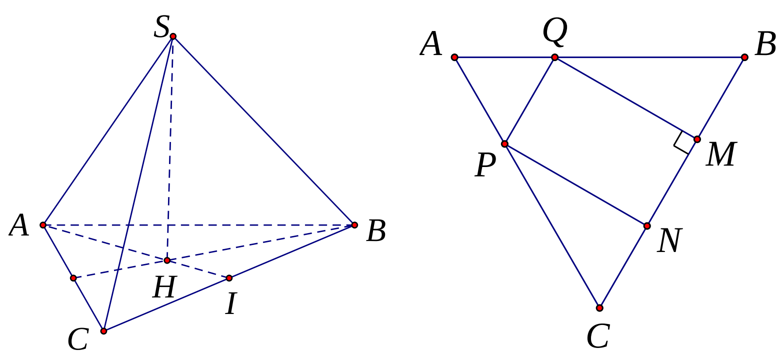
Gọi H là tâm mặt đáy và a là độ dài cạnh đáy. Ta có khoảng cách từ H đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ là $d_H=\dfrac{d_A}{2}=\sqrt{3}$ và $\dfrac{1}{d_H^2}=\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}\Rightarrow\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{4}{a^2}\Rightarrow a^2=\dfrac{4}{\dfrac{h^2-3}{3h^2}}=\dfrac{12h^2}{h^2-3}$

Do $V=\dfrac{Sh}{3}=\dfrac{a^2h}{3}=f(h)=\dfrac{4h^3}{h^2-3}$.

Có $f'(h)=\dfrac{4h^4-36h^2}{\left(h^2-3\right)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0(loai)\\x=3\\x=-3(loai)\end{array}\right.$ Lập bảng biến thiên suy ra thể tích nhỏ nhất $f(3)=18$

.

Câu 36: Chọn A



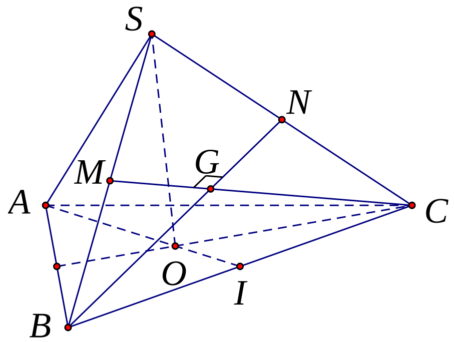
Ta có $h=\sqrt{16^2-\left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{16\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{16\sqrt{6}}{3}$.

Đặt $MB=NC=x\Rightarrow MQ=NP=x\tan 60°=\sqrt{3}x$, và $MN=BC-MB-NC=16-2x$.

Do đó $S=MN.MQ=\sqrt{3}x\left(16-2x\right)$.

$$V=\frac{Sh}{3}=\frac{\sqrt{3}x\left(16-2x\right).\frac{16\sqrt{6}}{3}}{3}=\frac{32x\left(8-x\right)\sqrt{2}}{3}\le\frac{512\sqrt{2}}{3}$$. Dấu bằng đạt được tại $x=4$.

Câu 37: Chọn A



Gọi O,G lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC,SBC, I là trung điểm BC.

Đặt $SA=SB=SC=x$.

Ta có: $CG^2=BG^2=\frac{4}{9}.BN^2=\frac{4}{9}\left(\frac{x^2+4}{2}-\frac{x^2}{4}\right)=\frac{x^2+8}{9}$.

Tam giác BGC vuông tại G nên $GB^2+GC^2=BC^2\Leftrightarrow 2.\frac{x^2+8}{9}=4\Leftrightarrow x=\sqrt{10}$.

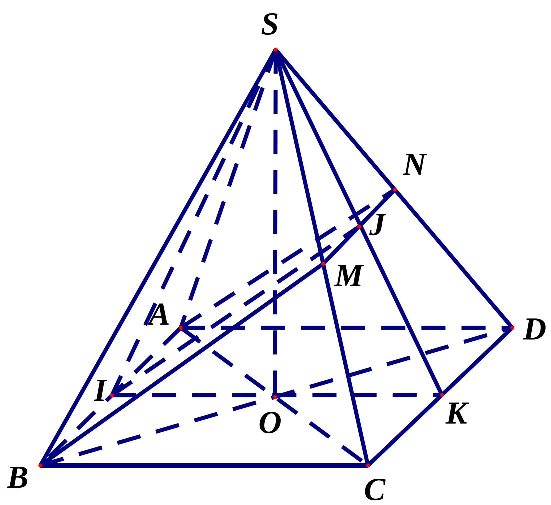
$$AO=\frac{2}{3}AI=\frac{2}{3}.\frac{2\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3};\ SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{10-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{78}}{3}.$$

$S_{\Delta ABC}=\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$ suy ra $V=\frac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{78}}{3}.\sqrt{3}=\frac{\sqrt{26}}{3}$.

Câu 38: Chọn C

Ta có: $V=\frac{1}{3}a^2.h\Leftrightarrow h=\frac{3V}{a^2}=\frac{3.\frac{a^3\sqrt{2}}{6}}{a^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 39: Chọn D



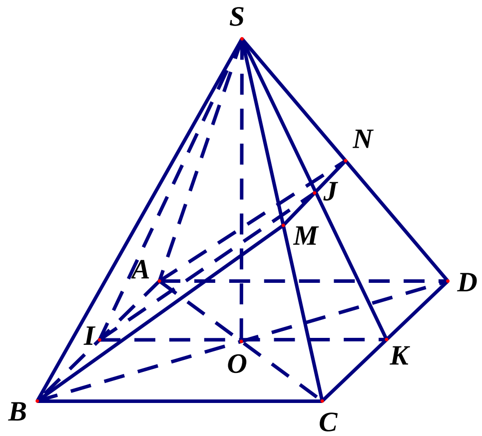
Gọi I,J,K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,MN,CD và O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có: J là trung điểm của MN và IK là hình chiếu của IJ trên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$.

Mà $IK\perp CD\Rightarrow IJ\perp CD\Rightarrow IJ\perp MN$.

Xét tam giác SIK có IJ, SO là các đường trung tuyến đồng thời là các đường cao nên nó là tam giác đều có cạnh $IK = BC = a \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 40: Chọn A



Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, MN, CD và O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có: J là trung điểm của MN và IK là hình chiếu của IJ trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Mà $IK \perp CD \Rightarrow IJ \perp CD \Rightarrow IJ \perp MN$.

Xét tam giác SIK có IJ, SO là các đường trung tuyến đồng thời là các đường cao nên nó là tam giác đều có cạnh $IK = BC = x\left(x > 0\right) \Rightarrow SO = \frac{x\sqrt{3}}{2} = IJ$.

Ta có: $S_{ABMN} = \frac{1}{2}\left(AB + MN\right).IJ \Leftrightarrow 2\sqrt{3}a^2 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{2}\right).\frac{x\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}a^2 = \frac{3\sqrt{3}x^2}{8} \Leftrightarrow x = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\left(\frac{4a\sqrt{3}}{3}\right)^2.\frac{\frac{4a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3}}{2} = \frac{32a^3}{9}$.

Câu 41: Chọn C

Gọi là trọng tâm ΔABC ta có $SO \perp (ABC)$.

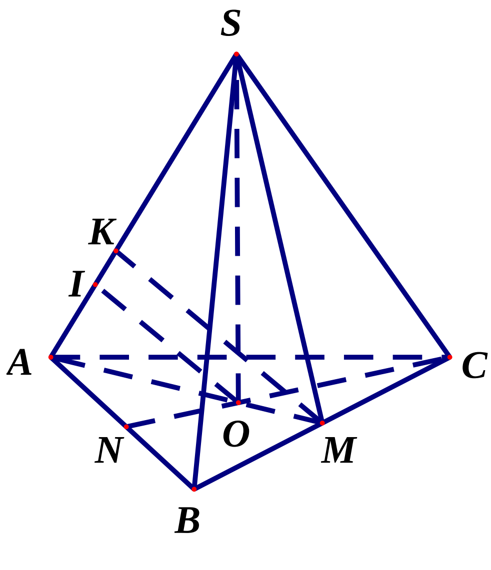
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AB.Ta có $BC \perp \left(SAM\right)$ tại M.

Dựng $MK \perp SA$ tại K ta có: KM là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC và $d\left(SA, BC\right) = MK = d$.

Đặt $AB = x\left(x > 0\right)$. Dựng $OI \perp SA$ tại $I \Rightarrow OI = \frac{2}{3}MK = \frac{2d}{3}$.

Ta có: $OA = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác SOA vuông tại O có đường cao $OI \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OS^2}$



$$\Leftrightarrow OS=\frac{OI.OA}{\sqrt{OA^2-OI^2}}=\frac{\frac{2d}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{x^2}{3}-\frac{4d^2}{9}}}=\frac{2d.x\sqrt{3}}{3\sqrt{3x^2-4d^2}}\left(x>\frac{2d\sqrt{3}}{3}\right)$$

Ta có: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{x^2\sqrt{3}}{4}.\frac{2dx\sqrt{3}}{3\sqrt{3x^2-4d^2}}=\frac{dx^3}{6\sqrt{3x^2-4d^2}}$.

Không mất tính tổng quát, đặt $d=1$, ta có $V_{S.ABC}=\frac{x^3}{6\sqrt{3x^2-4}}=f(x),x>\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $f'(x)=\frac{3x^2.6\sqrt{3x^2-4}-6x^3.\frac{6x}{2\sqrt{3x^2-4}}}{36\left(\sqrt{3x^2-4}\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-2\right)}{\left(\sqrt{3x^2-4}\right)^3}=0\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$

Bảng biến thiên:

x	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $V_{S.ABC}$ nhỏ nhất bằng $\frac{d^3}{3}$ khi $x=\sqrt{2}d$.

Cách 2: Đặt $BC=x,SO=h$, ta có:

$$AM=\frac{x\sqrt{3}}{2},SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=\sqrt{h^2+\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{h^2+\frac{x^2}{3}}.$$

Do đó: $2S_{SAM}=SO.AM=SA.MK$ nên $\frac{xh\sqrt{3}}{2}=d\sqrt{h^2+\frac{x^2}{3}}\Rightarrow\frac{3x^2h^2}{4}=d^2h^2+\frac{d^2x^2}{3}$

$\Rightarrow x^2\left(\frac{3}{4}h^2-\frac{d^2}{3}\right)=d^2h^2$ $\left(h>\frac{2d}{3}\right)$ và $x^2=\frac{12d^2h^2}{9h^2-4d^2}\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{x^2h\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}d^2h^3}{9h^2-4d^2}$.

Xem $d=1$, xét hàm số $f(h)=\frac{\sqrt{3}h^2}{9h^2-4},h>\frac{2}{3}$, ta có: $V_{SABC}\geq\frac{1}{3}=\frac{d^3}{3}$.

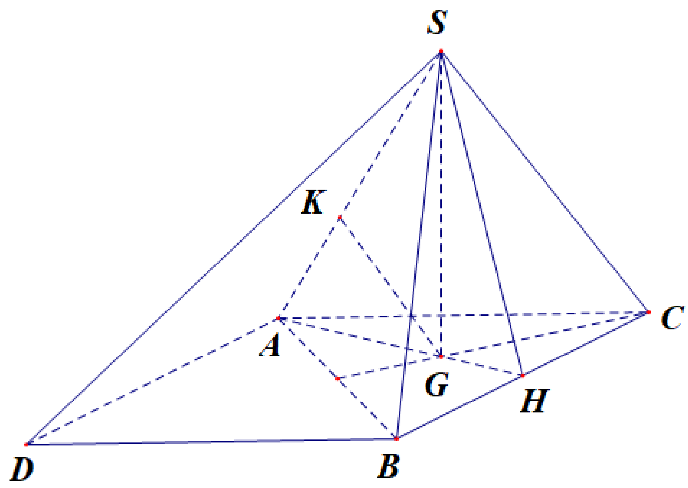
Dấu bằng đạt tại $h=\frac{2\sqrt{3}d}{3}$.

Câu 42: Chọn D

Ta có: $V_1=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ và $V_2=2.\frac{1}{3}.a^2.\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

$$\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{\sqrt{2}a^3}{12}}{\frac{\sqrt{2}a^3}{3}}=\frac{1}{4}.$$

Câu 43: Chọn D



Dựng hình bình hành $ACBD$, ta có

$BC \parallel (SAD) \Rightarrow d(BC,SA) = d(BC,(SAD)) = d(H,(SAD)) = \frac{3}{2}d(G,(SAD)) = \frac{3}{2}GK = a$.

Suy ra $GK = \frac{2a}{3} \Rightarrow \frac{1}{AG^2} = \frac{1}{KG^2} - \frac{1}{SG^2} \Rightarrow AG = \frac{3a}{2\sqrt{5}} \Rightarrow AB = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Thể tích khối chop là $V = \frac{1}{3}.\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}.SG = \frac{27a^3\sqrt{3}}{40}$.

Câu 44: Chọn B

Ta có thể tích của khối tứ diện đều cạnh a là $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, diện tích mỗi mặt là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $V = \frac{1}{3}.S.(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) \Rightarrow h = \frac{3V}{S} = \frac{\frac{3a^3\sqrt{2}}{12}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 45: Chọn C

Ta có thể tích của khối bát diện đều cạnh a là $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$, diện tích mỗi mặt là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $V = \frac{1}{3}.S.(h_1 + h_2 + ...h_8) \Rightarrow h = \frac{3V}{S} = \frac{\frac{3a^3\sqrt{2}}{3}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{4a\sqrt{6}}{3}$.

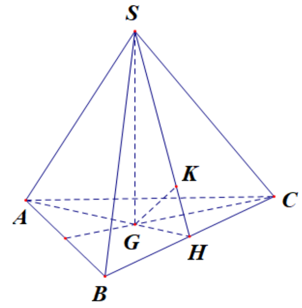
Câu 46: Chọn C

Gọi cạnh đáy là x $(x > 0)$. Khi đó diện tích đáy là $S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, chiều cao của hình chóp là $h = \frac{\sqrt{3(36 - x^2)}}{3}$ $(x < 6)$.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}.\frac{x^2\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{3(36 - x^2)}}{3} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{2}.\frac{x^2}{2}.(36 - x^2)}}{6} \le \frac{\sqrt{12^3}}{6} = 4\sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{x^2}{2}=\left(36-x^2\right)\Leftrightarrow x=2\sqrt{6}$.

Câu 47: Chọn B



Gọi cạnh đáy là $x\,(x>0)$. Khi đó $GH=\frac{x\sqrt{3}}{6}$,

Ta có $d\left(A,(SBC)\right)=3d\left(G,(SBC)\right)=3GK=3\Rightarrow GK=1$.

Có

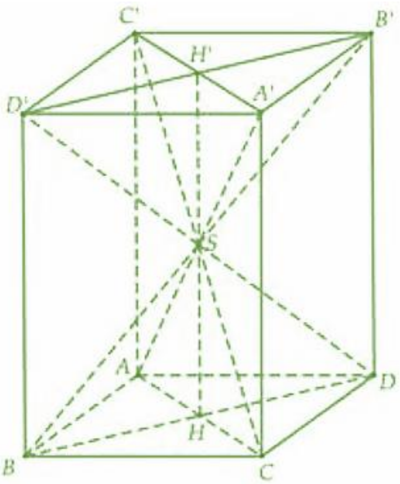
$HK=\sqrt{HG^2-GK^2}=\sqrt{\frac{x^2-12}{12}}\quad\left(x>2\sqrt{3}\right)\Rightarrow SH=\frac{GH^2}{HK}=\frac{x^2}{\sqrt{12}\sqrt{x^2-12}}$.

Diện tích tam giác SBC là $S_{SBC}=\frac{1}{2}BC.SH=\frac{1}{4\sqrt{3}}.\frac{x^3}{\sqrt{x^2-12}}$

Để thể tích khối chóp nhỏ nhất khi diện tích tam giác SBC nhỏ nhất. Khảo sát hàm số $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^2-12}}$, $x>2\sqrt{3}$ ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt được khi $x=3\sqrt{2}$.

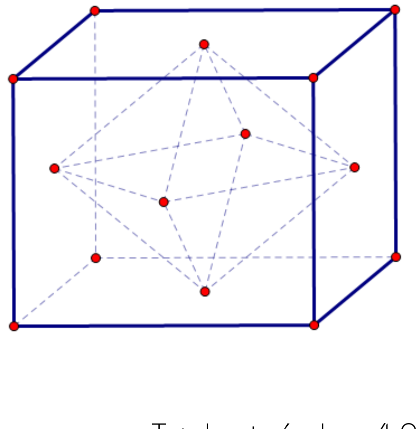
Vậy $MinV_{S.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{1}{4\sqrt{3}}.\frac{x^3}{\sqrt{x^2-12}}=\frac{9}{2}$.

Câu 48: Chọn B



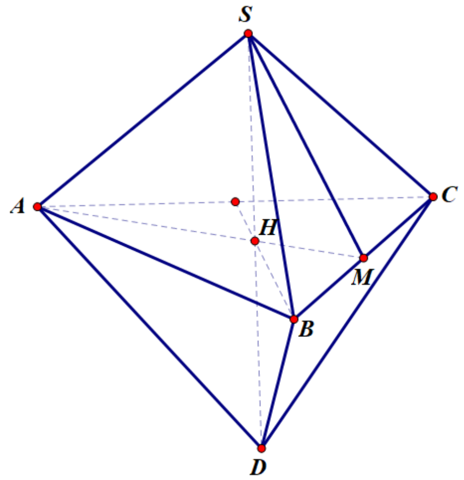
Khối đa diện tạo thành là một khối hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao: $h=HH'=2SH=2\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=a\sqrt{2}$. Do đó $V=S.h=a^2\sqrt{2}a=a^3\sqrt{2}$.

Câu 49: Chọn B



Gọi b là độ dài các cạnh của khối lập phương, độ dài các cạnh của khối bát diện đều $a = \frac{b\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = a\sqrt{2}$. Do đó $V = b^3 = 2a^3\sqrt{2}$

Câu 50: Chọn A



Ta có $V_{(H')} = V_{(H)} + 4V_{S.ABC}$, trong đó $S.ABC$ là khối chóp tam giác đều như hình vẽ.

Ta có $V_{(H)} = \frac{\sqrt{2}}{12}$ và $HD = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \tan HMD = \frac{HD}{HM} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = 2\sqrt{2}$.

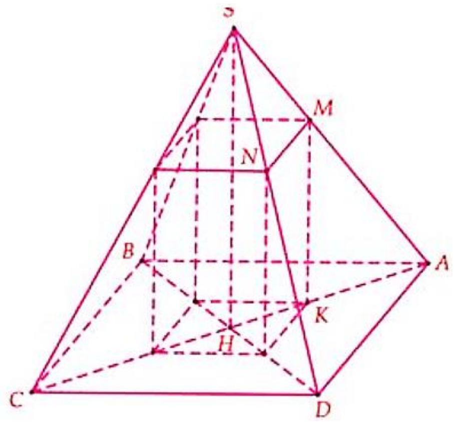
Do đó $\tan SMH = \tan\left(\frac{\pi - HMD}{2}\right) = \cot\frac{HMD}{2} = \sqrt{2}$.

Do đó $\mathrm{SH} = \mathrm{HM}.\tan SMH = \frac{\sqrt{3}}{6}.\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Vì vậy $V_{S.ABC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{6}}{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{24} \Rightarrow V_{(H')} = \frac{\sqrt{2}}{12} + 4.\frac{\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 51: Chọn A

Theo giả thiết thì khối lập phương có dạng như hình vẽ.

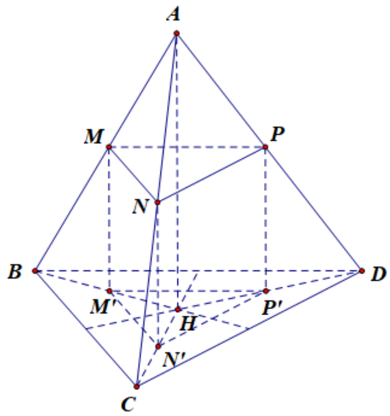


Chiều cao h của khối chóp tứ giác đều là $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Độ dài cạnh lập phương là x, theo Thales ta có

$\frac{MN}{AD}=\frac{SM}{SA}=1-\frac{AM}{SA}=1-\frac{MK}{SH}\Rightarrow\frac{x}{1}=1-\frac{x}{h}\Rightarrow x=\frac{h}{h+1}=\sqrt{2}-1$. Do đó $V=\left(\sqrt{2}-1\right)^3=5\sqrt{2}-7$

Câu 52: Chọn C



Theo giả thiết ta có khối lăng trụ tam giác đều $MNP.M'N'P'$ như hình vẽ dưới đây.

Đặt $MN=MM'=x$, theo Thales ta có $\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}=1-\frac{BM}{AB}=1-\frac{MM'}{AH}$.

Trong đó $MN=MM'=x, \mathrm{BC}=1, \mathrm{AH}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, do đó $V=\frac{x^3\sqrt{3}}{4}=\frac{(\sqrt{6}-2)^3\sqrt{3}}{4}=\frac{27\sqrt{2}-22\sqrt{3}}{2}$.

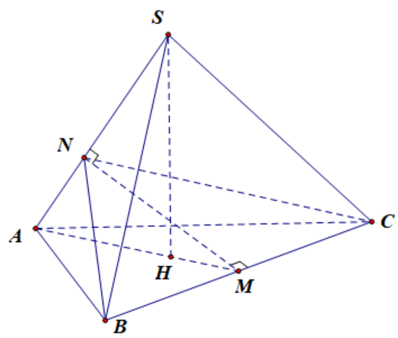
Câu 53: Chọn C

Đặt $AD=x$; $a=50$ cm. Gọi I là trung điểm của AB, ta có $NI=\frac{NQ-AD}{2}=\frac{a\sqrt{2}-x}{2}$.

Chiều cao khối chóp là $h=\sqrt{NI^2-HI^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}-x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2-a\sqrt{2}x}{2}}$. Do đó

$$V=\frac{Sh}{3}=f\left(x\right)=\frac{x^2\sqrt{\frac{a^2-a\sqrt{2}x}{2}}}{3}\le\max_{\left(0;\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}f\left(x\right)=f\left(\frac{2\sqrt{2}a}{5}\right)=\frac{4\sqrt{10}a^3}{375}=\frac{4000\sqrt{10}}{3}.$$

Câu 54: Chọn A



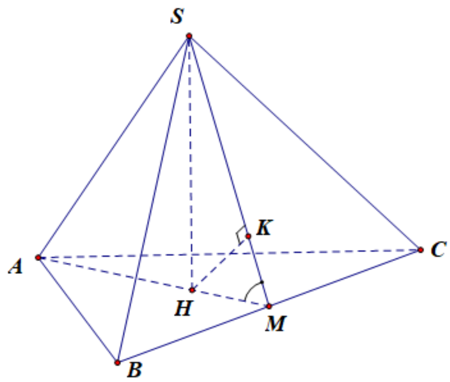
Gọi M là trung điểm của BC, N là hình chiếu vuông góc của M trên SA. Suy ra $SA\perp\left(BCN\right)$ do đó thiết diện là tam giác cân NBC.

$$MN=\frac{2S_{\Delta NBC}}{BC}=\frac{2.\frac{a^2}{4}}{a}=\frac{a}{2}.$$

Đặt $SH = h$, ta có $AM.SH = SA.MN \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}h}{2} = \frac{a\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}}{2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $V = \frac{\sqrt{3}a^2 h}{12} = \frac{\sqrt{3}a^2.\frac{a\sqrt{6}}{6}}{12} = \frac{\sqrt{2}a^3}{24}$.

Câu 55: Chọn A



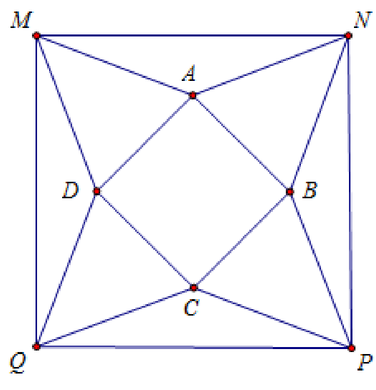
Đặt $AB = x$ và $SH = h$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SM, Ta có

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{\left(\frac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2} \Rightarrow \frac{9}{d^2\left(A,\left(SBC\right)\right)} = \frac{1}{h^2} + \frac{12}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{12h^2}{h^2 - 1}.$$

Do đó $V = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}x^2}{4}.h = f\left(h\right) = \frac{\sqrt{3}h^3}{h^2 - 1} \geq \min\limits_{(0;+\infty)} f\left(h\right) = f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{9}{2}$.

Dấu bằng đạt tại $h = \sqrt{3} \Rightarrow x = 18 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{h}{x\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$.

Câu 56: Chọn B

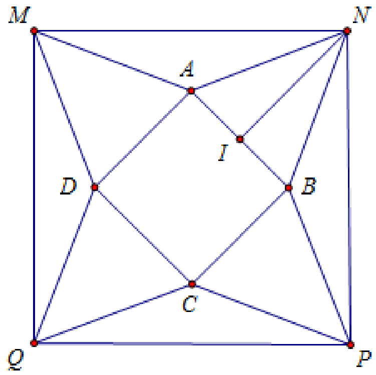


Ta có: $MAN = 150^0 \Rightarrow MNA = 15^0 \Rightarrow ANB = 60^0$

Suy ra khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng AM.

Xét ΔMAN ta có $AM = \frac{\frac{MN}{2}}{sin75^0} = \sqrt{2}$. Do đó: $V = \frac{AM^3\sqrt{2}}{6} = \frac{2}{3}$.

Câu 57: Chọn C



Gọi $AD = x$, ta có $NI = \dfrac{NQ - AD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2} - x}{2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$.

Chiều cao khối chóp là: $h = \sqrt{NI^2 - HI^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{a^2 - a\sqrt{2}x}{2}}$.

Diện tích đáy : $S_{ABCD} = x^2$

Vậy thể tích : $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.h = \dfrac{x^2.\sqrt{\dfrac{a^2 - a\sqrt{2}x}{2}}}{3}$, $x \in \left(0; \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$.

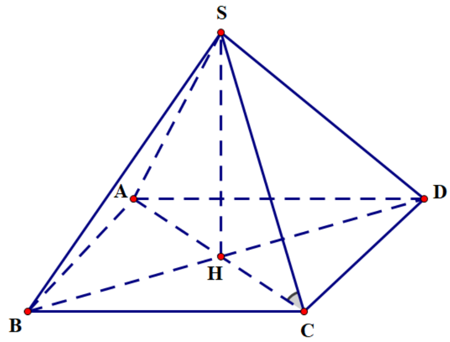
Xét hàm số : $f(x) = \dfrac{x^2.\sqrt{\dfrac{a^2 - a\sqrt{2}x}{2}}}{3}$, $x \in \left(0; \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$

Có $f'(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-5a\sqrt{2}x^2 + 4a^2x}{4\sqrt{\dfrac{a^2 - a\sqrt{2}x}{2}}}\right)$, $x \in \left(0; \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2\sqrt{2}a}{5}$.

x	$-\infty$	0	$\dfrac{2\sqrt{2}a}{5}$	$\dfrac{a}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

Suy ra $\max\limits_{\left(0;\frac{a}{\sqrt{2}}\right)} f(x) = f\left(\dfrac{2\sqrt{2}a}{5}\right) = \dfrac{4\sqrt{10}a^3}{375} \Rightarrow \max V = \dfrac{4\sqrt{10}a^3}{375}$.

Câu 58: Chọn C

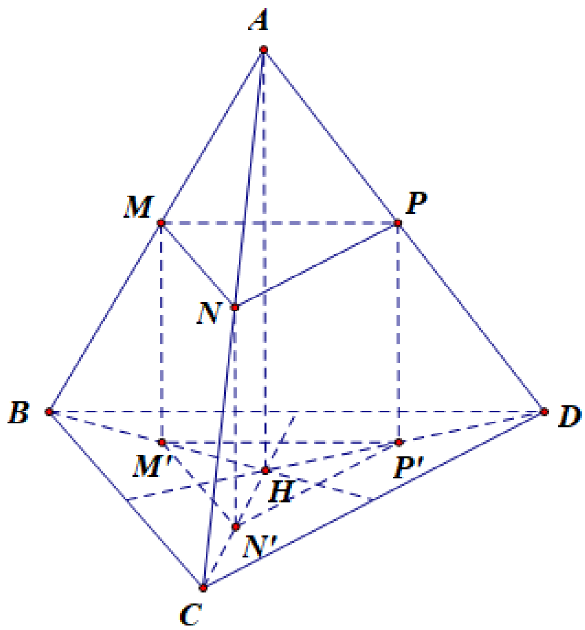


Ta có $\begin{cases} SC \cap (ABCD) = C \\ SH \perp (ABCD) \end{cases}$ suy ra góc giữa cạnh bên SC

và đáy là góc SCH $\Rightarrow SH = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \tan(SCH) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot m$

Ta có $\begin{cases} V = \dfrac{Sh}{3} = \dfrac{a^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot m}{3} = \dfrac{a^3 m\sqrt{2}}{6} \\ V = \dfrac{S'h'}{3} = \dfrac{(2a)^3 m'\sqrt{2}}{6} \end{cases} \Rightarrow m' = \dfrac{m}{8}$.

Câu 59: Chọn A



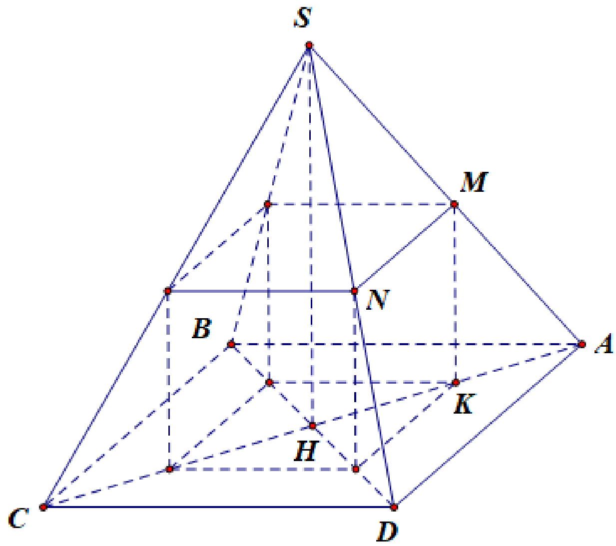
Theo giả thiết, ta có khối lăng trụ tam giác đều $MNP.M'N'P'$ như hình vẽ.

Đặt $MN = x$, $MM' = h'$; $BC = 1$; $AH = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Theo Thales, ta có

$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = 1 - \frac{MM'}{AH} \Rightarrow \frac{x}{1} = 1 - \frac{h'}{\frac{\sqrt{6}}{3}} \Rightarrow h' = \frac{\sqrt{6}}{3}(1-x)$. Do đó

$V = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.h' = f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}x^2(1-x) \le \max\limits_{(0;1)} f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{27}$.

Câu 60: Chọn B



Theo giả thiết thì hình hộp chữ nhật (H') có dạng như hình vẽ.

Đặt $h = SH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $MN = x$; $MK = h'$.

Theo Thales, ta có

$\dfrac{MN}{AD} = \dfrac{SM}{SA} = 1 - \dfrac{AM}{SA} = 1 - \dfrac{MK}{SH} \Rightarrow \dfrac{x}{1} = 1 - \dfrac{h'}{h} \Rightarrow h' = (1-x)h$. Do đó

$V_{(H')} = x^2 h' = x^2(1-x)h = f(x) = \dfrac{\sqrt{2}x^2(1-x)}{2} \le f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{27}$.

DẠNG 6 Thể tích khối tứ diện đặc biệt

Câu 1: Cho hình chóp $SABC$ có $SA = SB = SC = BA = BC = 1$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{12}$. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 2: Tính thể tích của khối chóp $SABC$ có $ASB = 60°, BSC = 90°, CSA = 120°$ và $SA = a, SB = 2a, SC = 4a$

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $a^3\sqrt{2}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 4a; CD = x$ và các cạnh còn lại bằng $3a$. Tính x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ là lớn nhất.

A. $x = 2a\sqrt{10}$. **B.** $a\sqrt{10}$. **C.** $6a$. **D.** $3a$.

Câu 4: Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau thỏa mãn $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 12$. Thể tích lớn nhất của khối tứ diện bằng:

A. 8. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 4. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 5: Cho hình chóp $SABC$ có thể tích bằng 3 và $AB = 3, AC = 4, BC = 5$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC. Góc giữa mặt phẳng $(SAB), (SAC)$ và đáy lần lượt là $30^0; 60^0$. Tính cotang góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

A. $\frac{24 - 13\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\frac{8 - 5\sqrt{3}}{5}$. **C.** $\frac{24 + 13\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\frac{8 + 5\sqrt{3}}{5}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 8$, $BC = 6$. Biết $SA = 6$ và vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Một điểm M thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và cách đều tất cả các mặt của hình chóp. Tính thể tích của khối tứ diện $MABC$.

A. $V = 24$. **B.** $V = \frac{64}{3}$. **C.** $V = \frac{32}{3}$. **D.** $V = 12$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 4a$, $AC = 3a$ và hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H. Biết A, H nằm khác phía với đường thẳng BC và các mặt bên của hình chóp cùng tạo với mặt đáy góc $60°$. Tính thể tích V của hình chóp đã cho.

A. $V = 2a^3\sqrt{3}$. **B.** $V = 12a^3\sqrt{3}$. **C.** $V = 6a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = 36a^3\sqrt{3}$.

Câu 8: Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc; khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng 1. Thể tích nhỏ nhất của khối tứ diện $OABC$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a có các góc $A'AB = BAD = A'AD = \alpha \left(0^0 < \alpha < 90^0\right)$. Biết khối hộp đã cho có thể tích bằng $\frac{a^3\sqrt{3\sqrt{3}-5}}{2}$

A. $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\alpha = \frac{\pi}{6}$. **C.** $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Câu 10: Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc thỏa mãn $\frac{1}{OA} + \frac{4}{OB} + \frac{9}{OC} = 1$. Khi biểu thức $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất, tính thể tích khối tứ diện $OABC$.

A. 162. **B.** 72. **C.** 108. **D.** 216.

Câu 11: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a, $A'AB = BAD = A'AD = \alpha \left(0 < \alpha < 90^0\right)$. Tính thể tích khối hộp đã cho theo a và α.

A. $V = \sqrt{2}a^3\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$.

B. $V = \sqrt{2}a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$.

C. $V = 2a^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$.

D. $V = 2a^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC và các mặt bên $(SBC),(SCA),(SAB)$ tạo với mặt đáy (ABC) các góc lần lượt là $30^0, 45^0, 60^0$. Tính thể tích khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{128\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$. **C.** $V = \frac{a^3}{8\left(2\sqrt{3}+1\right)}$. **D.** $V = \frac{a^3}{128\left(2\sqrt{3}+1\right)}$.

Câu 13: Cho hình chóp S.ABCD có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi và góc tạo bởi các mặt bên $(SAB),(SBC),(SCD),(SDA)$ và mặt đáy tương ứng là $90^0, 60^0, 60^0, 60^0$. Biết tam giác SAB vuông cân tại S có $AB = a$, chu vi tứ giác $ABCD$ bằng $9a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 14: Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N lần lượt di động trên các tia $AC, B'D'$ sao cho $AM + B'N = a\sqrt{2}$. Thể tích khối tứ diện $AMNB'$ có giá trị lớn nhất là?

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Câu 15: Khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a$, tam giác CAB đều và tam giác DAB vuông cân tại D. Góc giữa hai mặt phẳng $(CAB),(DAB)$ bằng 30^0. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$ **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$ **C.** $V = \frac{3a^3}{4}$ **D.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$

Câu 16: Cho hai đường thẳng Ax, By chéo nhau và vuông góc với nhau có $AB = 2a$ là đoạn vuông góc chung. Các điểm M, N lần lượt di động trên Ax, By sao cho $AM + 2BN = 3a$. Hỏi thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABMN$ là?

A. $\frac{2a^3}{3}$. **B.** $\frac{3a^3}{8}$. **C.** $\frac{a^3}{4}$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Câu 17: Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB=1$, $AC=2$, $BC=\sqrt{5}$. Các tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B, C, góc giữa mặt phẳng (SBC) và đáy bằng $60°$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{2\sqrt{15}}{5}$. **B.** $V=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{2\sqrt{15}}{3}$. **D.** $V=\frac{2\sqrt{15}}{15}$.

Câu 18: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB=x$, tất cả các cạnh còn lại bằng nhau và bằng $2-x$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của x để khối tứ diện đã cho có thể tích bằng $\frac{\sqrt{2}}{12}$.

A. 1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 19: Khối tứ diện $ABCD$ có $AB=2a$, tam giác CAB đều và tam giác DAB vuông cân tại D. Góc giữa hai mặt phẳng (CAB), (DAB) bằng $30°$. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

A. $V=\frac{a^3}{4}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **C.** $V=\frac{3a^3}{4}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$ có $BD=2$, hai tam giác ABD, BCD có diện tích lần lượt là 6 và 10. Biết thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 16, tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD)

A. $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$. **B.** $\arcsin\left(\frac{4}{15}\right)$. **C.** $\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$. **D.** $\arccos\left(\frac{4}{15}\right)$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi hai đường chéo AC và BD vuông góc nhau, mặt bên SAD là tam giác đều và tạo với mặt đáy góc 60^o, $AD=4, AC=6, BD=8$. Tính thể tích V của khối $S.ABCD$

A. $V=24$. **B.** $V=\frac{96}{5}$. **C.** $V=\frac{48}{5}$. **D.** $V=\frac{144}{5}$.

Câu 50 : Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=\sqrt{5}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

Câu 22: Cho khối tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và tổng diện tích các mặt (OBC), (OCA), (OAB) bằng $\sqrt{3}$. Diện tích mặt (ABC) bằng 1. Tính thể tích V của khối tứ diện đã cho.

A. $V=\frac{1}{6}$. **B.** $V=\frac{\sqrt[4]{12}}{9}$. **C.** $V=\frac{2\sqrt[4]{3}}{9}$. **D.** $V=\frac{\sqrt[4]{3}}{9}$.

Câu 23: Cho khối lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có độ dài các cạnh bằng x. Các điểm M, N lần lượt trên các cạnh AA_1, CC_1 sao cho $AM+CN=2a$. Tìm x biết thể tích khối tứ diện $BDMN$ bằng $2a^3$.

A. $x=a\sqrt{2}$. **B.** $x=a\sqrt{6}$. **C.** $x=a\sqrt{3}$. **D.** $x=2a\sqrt{2}$.

Câu 24: Cho khối tứ diện $ABCD$ có tam giác ABD đều, tam giác CAB vuông cân tại C, $AB = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(CAB),(ADB)$. Tính $\cos\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25: Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = 9(cm)$, $BC = 11(cm)$, $CA = 6(cm)$, $SA = 3(cm)$, $SB = 3(cm)$ và $SC = 5(cm)$. Tính thể tích V của khối chóp.

A. $V = \frac{\sqrt{2159}}{6}(cm^3)$. **B.** $V = \frac{\sqrt{241}}{2}(cm^3)$. **C.** $V = \frac{\sqrt{2159}}{2}(cm^3)$. **D.** $V = \frac{3\sqrt{241}}{2}(cm^3)$.

Câu 26: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 1, BC = 2$. Góc $CBB' = 90^0, ABB' = 120^0$. Gọi M là trung điểm của AA'. Biết $d(AB',CM) = \frac{\sqrt{7}}{7}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 27: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $BAC = 90°$ và góc giữa các mặt phẳng (DAB), (DBC), (DCA) với mặt phẳng (ABC) bằng nhau và bằng $60°$, hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC) là điểm H sao cho A, H nằm về hai phía của đường thẳng BC. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

A. $V = 2\sqrt{3}a^3$. **B.** $V = 6\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = 4\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 12\sqrt{3}a^3$.

Câu 28: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $BAC = 90°$ và góc giữa các mặt phẳng (DAB), (DBC), (DCA) với mặt phẳng (ABC) bằng nhau và bằng $60°$, hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC) là điểm H sao cho C, H nằm về hai phía của đường thẳng AB. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

A. $V = 2\sqrt{3}a^3$. **B.** $V = 6\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = 4\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 12\sqrt{3}a^3$.

Câu 29: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a$, $AC = 4a$, $BAC = 90°$ và góc giữa các mặt phẳng (DAB), (DBC), (DCA) với mặt phẳng (ABC) bằng nhau và bằng $60°$, hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC) là điểm H sao cho B, H nằm về hai phía của đường thẳng AC. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$.

A. $V = 2\sqrt{3}a^3$. **B.** $V = 6\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = 4\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 12\sqrt{3}a^3$.

Câu 30: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a, AC = 4a, BAC = 90°$ và góc giữa các mặt phẳng $(DAB),(DBC),(DCA)$ và mặt phẳng (ABC) bằng nhau và bằng $60°$, hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC) là điểm H nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$:

A. $V = 2\sqrt{3}a^3$. **B.** $V = 6\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = 4\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 12\sqrt{3}a^3$.

Câu 31: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=\sqrt{3}, AD=\sqrt{7}$. Hai mặt bên $(ABB'A),(ADD'A')$ tạo với đáy các góc lần lượt là 45° và 60°. Tính thể tích V của khối hộp đã cho biết độ dài cạnh bên bằng 1.

A. $V=3$. **B.** $V=\frac{7}{3}$. **C.** $V=\sqrt{3}$. **D.** $V=\sqrt{7}$.

Câu 32: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB=3a, AC=4a, BAC=90^\circ$, góc giữa các mặt phẳng $(DAB),(DAC)$ và mặt phẳng (ABC) lần lượt là 45° và 60°. Tính thể tích V của khối tứ diện $ABCD$ biết $AD=6a$.

A. $V=\frac{12\sqrt{5}a^3}{5}$. **B.** $V=\frac{4\sqrt{21}a^3}{7}$. **C.** $V=\frac{4\sqrt{5}a^3}{5}$. **D.** $V=\frac{12\sqrt{21}a^3}{7}$.

Câu 33: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AC=\frac{a}{2}, BC=a$. Hai mặt phẳng $(SAB),(SAC)$ cùng tạo với đáy góc 60°, tam giác SBC nhọn và mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)a^3}{32}$. **B.** $V=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)a^3}{32}$. **C.** $V=\frac{3\left(3-\sqrt{3}\right)a^3}{32}$. **D.** $V=\frac{3\left(3+\sqrt{3}\right)a^3}{32}$.

Câu 34: Cho hai đường thẳng chéo nhau Ax, By tạo với nhau góc 60° và $AB=a$ là độ dài đoạn vuông góc chung. Hai điểm M, N di động trên Ax, By sao cho $MN=2a$. Tìm thể tích lớn nhất của khối tứ diện $ABMN$.

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{16}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{36}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Câu 35: Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB=AC=a$, các góc $BAC=120^\circ$, $SBA=SCA=90^\circ$, góc giữa mặt phẳng (SAC) và đường thẳng SB bằng $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{8}$ và khoảng cách từ S đến (ABC) nhỏ hơn $2a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 36: Cho hai đường thẳng a,b cố định chéo nhau. Gọi AB là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng a,b $A\in a; B\in b$. Trên a lấy điểm M khác A, trên b lấy điểm N khác B sao cho $AM=x; BN=y$. Biết $AB=6$, góc giữa hai đường thẳng a,b là 60^0. Tính thể tích của tứ diện $ABMN$ theo x và y.

A. $\frac{\sqrt{3}xy}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}xy}{4}$. **C.** $\frac{xy}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}xy}{6}$.

Câu 37: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA=SB$, $SC=SD$. Biết rằng mặt phẳng $(SAB)\perp(SCD)$ và tổng diện tích của hai tam giác SAB, SCD bằng $\frac{7a^2}{10}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{4a^3}{75}$. **B.** $V=\frac{4a^3}{15}$. **C.** $V=\frac{4a^3}{25}$. **D.** $V=\frac{12a^3}{25}$.

Câu 38: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $SAB = SCB = 90^0$. Gọi M là trung điểm cạnh SA. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCM) bằng $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng ?

A. $\frac{10\sqrt{3}}{9}a^3$. **B.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}a^3$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{9}a^3$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 39: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = BC = x$, $SB = CA = y$, $SC = AB = z$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ bằng?

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Câu 40: Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua trung điểm của đoạn thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

A. $\frac{7}{6}$. **B.** $\frac{11}{12}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Câu 41: Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng?

A. $\frac{7}{6}$. **B.** $\frac{11}{12}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Câu 42: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, mặt bên tạo với đáy một góc $75°$. Mặt phẳng chứa (P) chứa đường thẳng AB và tạo với góc đáy một góc $45°$ chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Thể tích của khối đa diện chứa đỉnh S bằng:

A. $\frac{16+9\sqrt{3}}{78}$. **B.** $\frac{2+\sqrt{3}}{3(1+\sqrt{2})}$. **C.** $\frac{2+\sqrt{3}}{6(1+\sqrt{2})}$. **D.** $\frac{16+9\sqrt{3}}{26}$.

Câu 43: Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = 3a$, $AC = a$. Mặt phẳng (DBC), (DAC), (DAB) lần lượt tạo với mặt phẳng (ABC) các góc $90°$, α, β trong đó $\alpha + \beta = 90°$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{3a^3}{13}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{10}$. **D.** $\frac{3a^3}{8}$.

Câu 44: Cho khối đa diện $SABCD$ bằng cách ghép hai khối chóp tam giác $S.ABD$ và $S.BCD$ lại với nhau, biết $SA = 4; SB = 3; SC = 2; SD = 1$ và $ASB = BSC = CSD = DSA = BSD = 60^0$. Thể tích khối đa diện $SABCD$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{7\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 45: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC; điểm P thuộc cạnh CD sao cho $PD = 2CP$, mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Tính thể tích khối đa diện $BMNPQD$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{16}$. **B.** $\frac{23\sqrt{2}}{432}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{48}$. **D.** $\frac{13\sqrt{2}}{432}$.

Câu 46: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 3a; AC = a\sqrt{15}; BD = a\sqrt{10}; CD = 4a$. Biết góc giữa đường thẳng AD và (BCD) là 45^0, khoảng cách giữa AD và BC là $\frac{5a}{4}$. Hình chiếu vuông góc của A lên (BCD) nằm trong tam giác BCD. Tính độ dài đoạn AD.

A. $\frac{5a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $2a$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 47: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB', CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$; khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ và $A'G' = \frac{4}{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng.

A. 2. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 4. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 48: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $\frac{3}{4}$. Khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB', CC' lần lượt bằng 1; $\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Côsin góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng.

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{4}$.

Câu 49: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{6}}{4}$, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCA) bằng $\frac{\sqrt{15}}{10}$; khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{30}}{20}$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng.

A. $\frac{1}{36}$. **B.** $\frac{1}{48}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

Câu 50: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = AC = 1$, $BAC = 30°$. Các mặt bên $(ABB'A')$, $(ACC'A')$ lần lượt tạo với đáy các góc $45°$, $60°$ và $AA' = 1$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng.

A. $\frac{3\sqrt{31}}{124}$. **B.** $\frac{\sqrt{93}}{372}$. **C.** $\frac{\sqrt{31}}{124}$. **D.** $\frac{\sqrt{93}}{124}$.

Câu 51: Cho khối chóp $S.ABC$ có $AB = 5(cm)$, $AC = 7(cm)$, $SA = 3(cm)$. $CAB = 30°$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SAC) và đáy lần lượt là $45°$, $30°$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{35\sqrt{29}}{116}$. **B.** $V = \frac{7\sqrt{5}}{4}$. **C.** $V = \frac{21\sqrt{5}}{4}$. **D.** $V = \frac{105\sqrt{5}}{116}$.

Câu 52: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=\sqrt{3}$, $AC=\sqrt{7}$. Hai mặt bên (SAB), (SAC) lần lượt tạo với đáy góc $45°$, $60°$ và $SA=1$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$ bằng.

A. $V=\dfrac{1}{2}$. **B.** $V=\dfrac{7}{9}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=1$ và $AC=\sqrt{3}$. Các mặt bên $(SBC),(SAC),(SAB)$ lần lượt tạo với đáy các góc $30^0,45^0$ và 60^0. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

A. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{20}$ **C.** $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{20}$

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$, đáy làm tam giác vuông tại A và $AB=1$, $AC=\sqrt{3}$. Các mặt bên $(SAC),(SAB)$ lần lượt tạo với đáy các góc $45^0,60^0$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC. Cô-sin góc giữa mặt (SBC) và đáy bằng

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** $\dfrac{3}{4}$

Câu 55: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB=a$, $AC=2a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với đáy, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **D.** $V=\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{9}$

Câu 56: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $BAD=120^0$. Các mặt bên $(SAB),(SBC),(SCD),(SDA)$ lần lượt tạo với đáy các góc $90^0,30^0,45^0,60^0$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $V=\dfrac{\left(4\sqrt{3}-3\right)a^3}{26}$ **B.** $V=\dfrac{\left(4\sqrt{3}-3\right)a^3}{104}$ **C.** $V=\dfrac{\left(12\sqrt{3}-9\right)a^3}{26}$ **D.** $V=\dfrac{\left(12\sqrt{3}-9\right)a^3}{104}$

Câu 57: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1,AD=2,AA'=3$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua C' và cắt các tia AB,AD,AA' lần lượt tại M,N,P. Khối tứ diện $AMNP$ có thể tích nhỏ nhất bằng

A. 27 **B.** 14 **C.** 11 **D.** 36

Câu 58: Cho hai đường thẳng chéo nhau Ax,By và hợp với nhau một góc bằng 60^0. Biết $AB=a$ là đoạn vuông góc chung. Lấy điểm C trên By sao cho $BC=a$ và gọi D là hình chiếu vuông góc của C lên Ax. Thê rtichs khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3}{12}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Câu 59: Cho khối tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = BD = CD = 1$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và BC bằng

A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 60: Trong không gian cho ba tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc và các điểm A, B, C không trùng với điểm O lần lượt thay đổi trên các tia Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: Tỉ số diện tích tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3}{2}$. Khối tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** $\frac{27\sqrt{3}}{2}$.

Câu 61: Cho khối đa diện $ABC.A'B'C'$ có $AA'//BB'//CC'$. Biết khoảng cách từ điểm A đến BB' bằng 1, khoảng cách từ điểm A đến CC' bằng $\sqrt{3}$; khoảng cách giữa hai đường thẳng BB', CC' bằng 2 và $AA' = 1, BB' = 2, CC' = 3$. Thể tích của khối đa diện $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 62: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a, AC = \sqrt{3}a, SB > 2a$ và $ABC = BAS = BCS = 90^0$, sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{11}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}a^3}{9}$.

Câu 63: Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = \sqrt{2}, OC = 1$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên các cạnh AC, BC sao cho hai mặt phẳng (OMN), (ABC) vuông góc với nhau. Khối đa diện $ABOMN$ có thể tích lớn nhất bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 64: Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 1$, $OB = 2$, $OC = 3$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC, mặt phẳng (α) qua trung điểm I của OG cắt các tia OA, OB, OC lần lượt tại D, E, F. Thể tích khối tứ diện $ODEF$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 65: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Khoảng cách từ điểm C đến BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ điểm A đến BB', CC' lần lượt là1 và 2; hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

Câu 66: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB', CC' lần lượt là 1 và $\sqrt{3}$; góc giữa hai mặt bên của lăng trụ chung cạnh AA' bằng 90^0. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $AM' = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

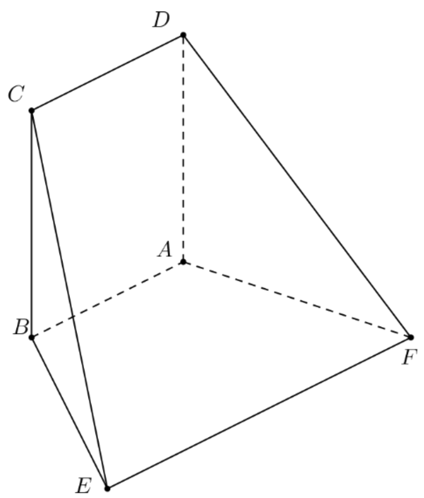
Câu 67: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là hình chóp tam giác đều, $AB = a$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AA' và BC là $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Hãy tính thể tích của khối chóp $A'.BB'C'C$

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{18}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{81}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{31}}{8}$.

Câu 68: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 69: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và hình thang cân $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Biết $AB = a$, $BC = BE = a\sqrt{2}$, $AB // EF$ và $EF = 3a$. Thể tích khối đa diện $ABCDEF$ bằng



A. $\dfrac{5a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $a^3\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 70: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'B$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$; góc giữa AA' với $(ABCD)$ bằng $45°$. Khoảng cách từ A đến các đường thẳng $BB'; DD'$ cùng bằng 1. Góc của mặt phẳng $(BB'C'C)$ và mặt phẳng $(C'CDD')$ bằng $60°$. Thể tích khối hộp đã cho bằng

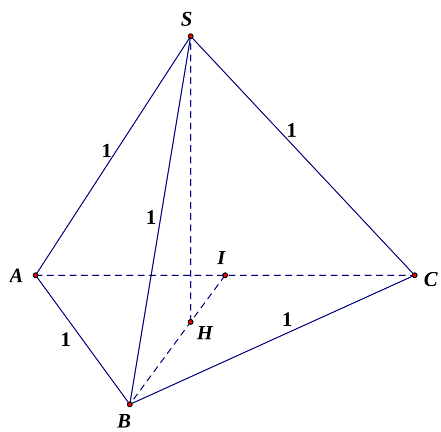
A. $2\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.B	4.B	5.A	6.C	7.B	8.C	9.B	10.D
11.D	12.B	13.C	14.B	15.D	16.B	17.D	18.D	19.D	20.C
21.A	22.D	23.B	24.D	25.B	26.A	27.A	28.D	29.C	30.B
31.A	32.A	33.D	34.A	35.B	36.A	37.A	38.C	39.A	40.A
41.D	42.D	43.A	44.A	45.B	46.B	47.D	48.D	49.D	50.B
51.D	52.A	53.D	54.A	55.B	56.A	57.A	58.C	59.B	60.C
61.D	62.A	63.A	64.A	65.D	66.A	67.C	68.B	69.A	70.C

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn C**



Gọi SH là đường cao của hình chóp và I là trung điểm của AC

Vì $SA = SB = SC = 1$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do đó $H \in BI$.

Đặt $AC = x, 0 < x < \sqrt{3}$.

Ta có $BI = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}$.

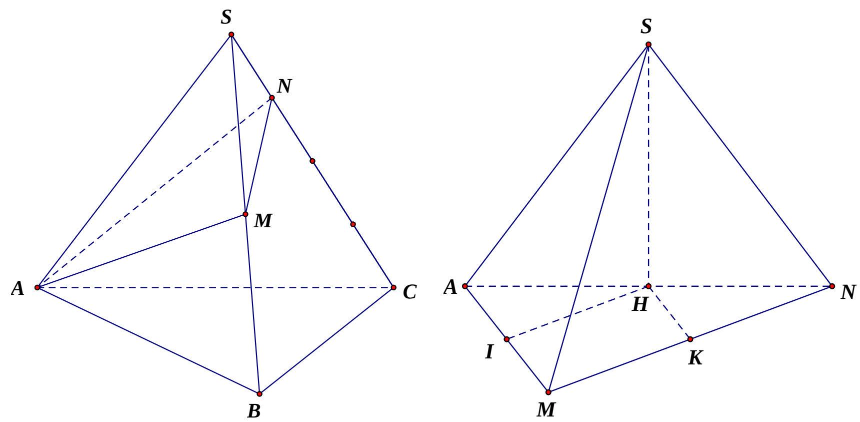
Suy ra $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BI.AC = \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{4}$

Mặt khác, $HB = \dfrac{AB.AC.BC}{4.S_{ABC}} = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. Suy ra $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{\dfrac{3-x^2}{4-x^2}}$

Khi đó, $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{12}.x\sqrt{3-x^2} \le \dfrac{1}{12}.\dfrac{x^2+3-x^2}{2} = \dfrac{1}{8}$

Vậy $\max\left(V_{SABC}\right) = \dfrac{1}{8}$

Câu 2: **Chọn B**



Trên các cạnh SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $SM = SN = a$.

Khi đó, $\dfrac{V_{SAMN}}{V_{SABC}}=\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow V_{SABC}=8.V_{SAMN}$.

Xét khối chóp *SAMN*. Gọi *SH* là đường cao của hình chóp.

Tam giác *SAM* đều $\Rightarrow AM=a$

Tam giác *SMN* vuông cân tại *S* $\Rightarrow MN=a\sqrt{2}$

Tam giác *SAN* cân tại *S* và $\widehat{NSA}=120^\circ\Rightarrow AN=\sqrt{SA^2+SN^2-2SA.SN.\cos 120^\circ}=a\sqrt{3}$

Từ đây suy ra tam giác *AMN* vuông tại *M*. Gọi *I*, *K* lần lượt là trung điểm của *AM*, *MN*. Khi đó:

$$\left.\begin{matrix}AM\perp SI\\AM\perp SH\end{matrix}\right\}\Rightarrow AM\perp(SHI)\Rightarrow AM\perp HI$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $MN\perp HK$. Do đó *H* là trung điểm của *AN*.

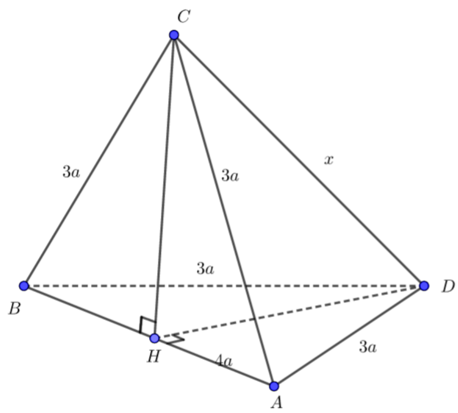
Khi đó, $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\dfrac{a}{2}$. Suy ra $V_{SAMN}=\dfrac{1}{3}SH.S_{AMN}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Vậy $V_{SABC}=8.V_{SAMN}=V_{SAMN}=\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Note: có thể sử dụng công thức giải nhanh:

$$V_{SABC}=\frac{SA.SB.SC}{6}.\sqrt{1+2\cos ASB.\cos BSC.\cos CSA-\cos^2 ASB-\cos^2 BSC-\cos^2 CSA}=\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$$

Câu 3: **Chọn B**



Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow CH\perp AB;DH\perp AB$. $CH=DH=\sqrt{(3a)^2-(2a)^2}=a\sqrt{5}$.

Áp dụng công thức $V=\dfrac{2}{3}.\dfrac{S_1.S_2.\sin\alpha}{a}\Rightarrow V_{ABCD}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{S_{ABC}.S_{ABD}.\sin\left((ABC);(ABD)\right)}{AB}$

$$V_{ABCD}=\frac{2}{3}.\frac{\frac{1}{2}.2a.a\sqrt{5}.\frac{1}{2}.2a.a\sqrt{5}.\sin\left((ABC);(ABD)\right)}{4a}=\frac{5}{6}.a^3.\sin\left((ABC);(ABD)\right)$$

Do đó thể tích $ABCD$ lớn nhất khi $\sin\left((ABC);(ABD)\right)=1\Leftrightarrow(ABC)\perp(ABD)$.

Khi đó $CH\perp DH\Rightarrow CD^2=CH^2+DH^2=10a^2\Rightarrow CD=a\sqrt{10}$.

Câu 4: **Chọn B**

Ta có: $V=\dfrac{1}{6}OA.OB.OC$

$$\Rightarrow V^2=\frac{1}{36}OA^2.OB^2.OC^2\le\frac{1}{36}\left(\frac{OA^2+OB^2+OC^2}{3}\right)^3=\frac{16}{9}\Rightarrow V\le\frac{4}{3}$$

Câu 5: **Chọn A**

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy. α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

Ta có: $AB^2+AC^2=BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A $\Rightarrow S_{ABC}=6.$ và $SH=\frac{3V}{S_{ABC}}=\frac{3}{2}$

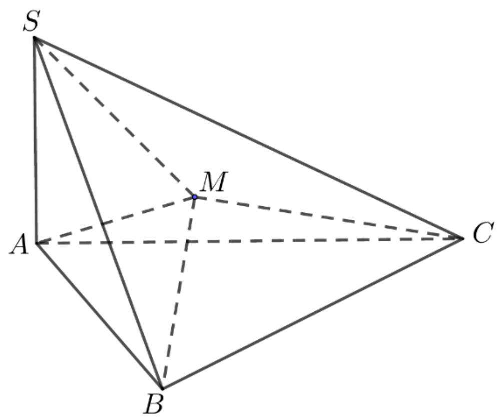
Từ H kẻ $HI\perp AB;HK\perp AC;HM\perp BC$

$$\Rightarrow HI=\frac{SH}{\tan 30^0}=\frac{3\sqrt{3}}{2};HK=\frac{SH}{\tan 60^0}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{HBC}=S_{ABC}-S_{HAB}-S_{HAC}=6-\frac{1}{2}.\frac{3\sqrt{3}}{2}.3-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.4=\frac{24-13\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow HM=\frac{2S_{HBC}}{BC}=\frac{24-13\sqrt{3}}{10};\ \cot\alpha=\frac{HM}{SH}=\frac{24-13\sqrt{13}}{15}.$$

Câu 6: **Chọn C**



Từ giả thiết ta có $BC\perp AB,AS\Rightarrow BC\perp BS$.

Xét tam giác vuông ABC ta có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10$.

Xét tam giác vuông SBA ta có $SB=\sqrt{AS^2+BA^2}=10$.

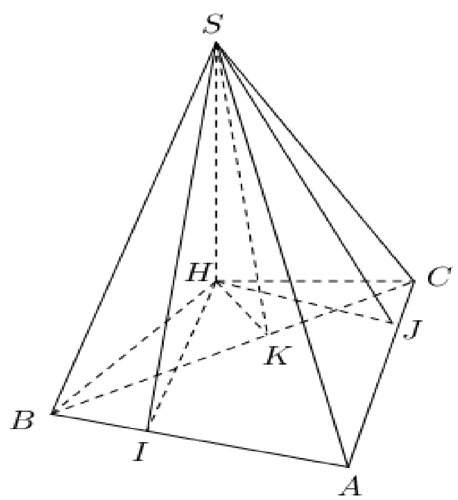
Gọi h là khoảng cách chung từ M đến các mặt của hình chóp $S.ABC$.

Từ giả thiết ta có: $V_{SABC}=\frac{1}{6}SA.BA.BC=48=V_{MABC}+V_{MABS}+V_{MCBS}+V_{MACS}$

$$=\frac{1}{3}h\left(S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ABS}+S_{\Delta ASC}+S_{\Delta SBC}\right)=\frac{1}{3}h\left(\frac{1}{2}AB.BC+\frac{1}{2}AC.AS+\frac{1}{2}SB.BC+\frac{1}{2}AB.AS\right)=36h$$

$$\Rightarrow h=\frac{4}{3}\Rightarrow V_{MABC}=\frac{1}{3}hS_{\Delta ABC}=\frac{32}{3}.$$

Câu 7: **Chọn B**



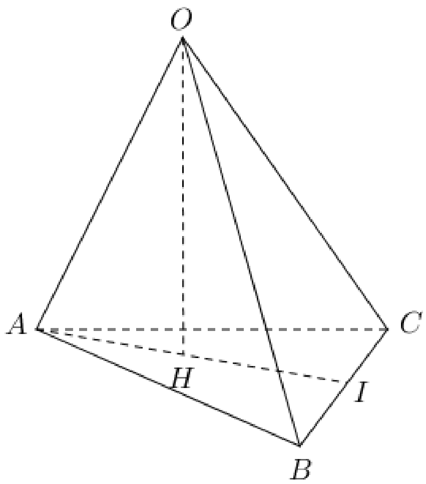
Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, AC, BC.

Khi đó $SIH = SJH = SKH = 60° \Rightarrow HI = HJ = HK = \frac{SH}{\sqrt{3}}$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta HAB} + S_{\Delta HAC} - S_{\Delta HBC} = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)\frac{SH}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.2a.\frac{SH}{\sqrt{3}}$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC = a.\frac{SH}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow SH = 6a\sqrt{3}$. Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.6a\sqrt{3}.6a^2 = 12a^3\sqrt{3}$.

Câu 8: Chọn C



Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$ $(a, b, c > 0)$.

Vẽ $AI \perp BC$ $(I \in BC)$, $OH \perp AI$. Suy ra $OH \perp (ABC) \Rightarrow d(O, (ABC)) = OH = 1$.

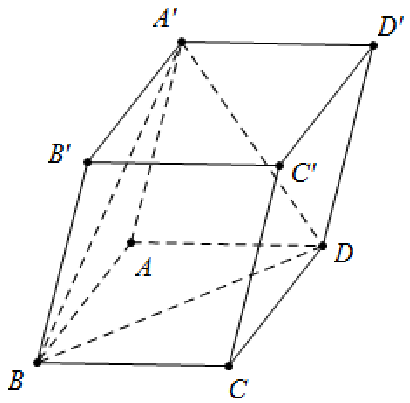
Ta có $V_{OABC} = \frac{1}{3}OA.S_{\Delta OBC} = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{abc}{6}$.

Xét tam giác OAI vuông tại O có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$. Ta lại có $1 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{27}{(abc)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{6}abc \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $V_{OABC} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Thể tích nhỏ nhất của khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Câu 9: Chọn B



Áp dụng công thức nhanh ta có:

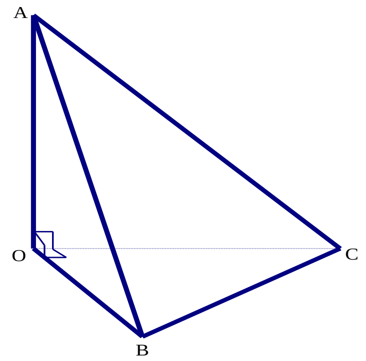
$$V_{A.A'BD}=\frac{a.a.a}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+2\cos\alpha.\cos\alpha.\cos\alpha}=\frac{a^3}{6}\sqrt{1-3\cos^2\alpha+2\cos^3\alpha}.$$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'}=3V_{A'.ABCD}=6V_{A.A'BD}=a^3\sqrt{1-3\cos^2\alpha+2\cos^3\alpha}=\frac{a^3\sqrt{3\sqrt{3}-5}}{2}.$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-3\cos^2\alpha+2\cos^3\alpha}=\sqrt{3\sqrt{3}-5}\Leftrightarrow 4\left(1-3\cos^2\alpha+2\cos^3\alpha\right)=3\sqrt{3}-5.$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3\alpha-12\cos^2\alpha-3\sqrt{3}+9=0\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}.$$

Câu 10: Chọn D



Áp dụng bất đẳng thức Cauchy- Schwarz

$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{\left(a_1+a_2+...+a_n\right)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$, dấu “=” xảy ra khi $a_ib_j=a_jb_i,\forall i\ne j$

Ta có $1=\frac{1}{OA}+\frac{4}{OB}+\frac{9}{OC}=\frac{1}{OA}+\frac{2^2}{OB}+\frac{3^2}{OC}\ge\frac{(1+2+3)^2}{OA+OB+OC}=\frac{36}{OA+OB+OC}$

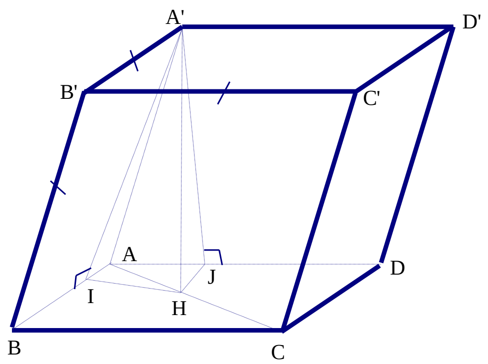
$\Rightarrow OA+OB+OC\ge 36$

Suy ra $OA+OB+OC$ nhỏ nhất bằng 36 khi $\frac{1}{OA}=\frac{2}{OB}=\frac{3}{OC}$.

Mà $\frac{1}{OA}+\frac{4}{OB}+\frac{9}{OC}=1$ nên $OA=6;OB=12;OC=18$.

Vậy $V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}.6.12.18=216.$

Câu 11: Chọn D



Gọi H,I,J lần lượt là hình chiếu của A' lên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và các cạnh AB,AD.

Ta có $\begin{cases} A'H \perp AB \\ AI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'HI) \Rightarrow AB \perp HI.$

Tương tự cũng có $HJ \perp AD.$

Xét hai tam giác vuông $A'AI$ và $A'AJ$ có $\begin{cases} AA' \text{ chung} \\ A'AI = A'AJ = \alpha \end{cases}$ nên $\Delta A'AI = \Delta A'AJ.$

Suy ra $AI = AJ = AA'\cos\alpha = a\cos\alpha,$ do đó hai tam giác AHI, AHJ bằng nhau nên $HI = HJ.$

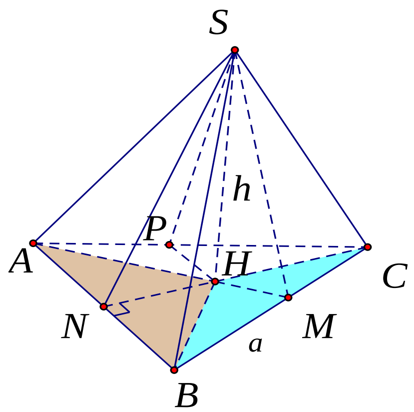
Vậy H cách đều AB và AD nên nằm trên phân giác góc $BAD \Rightarrow H \in AC.$

$$AH = \frac{AI}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}},\ A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha}.$$

Diện tích đáy $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = AB.AD.\sin\alpha = a^2\sin\alpha.$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H.S_{ABCD} = 2a^3\sin\frac{\alpha}{2}.\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha} = 2a^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$.

Câu 12: Chọn B



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh BC, AB, AC; h là chiều cao của khối chóp $S.ABC$.

Khi đó, $SNH = 30^\circ$, $SPH = 45^\circ$, $SMH = 60^\circ$.

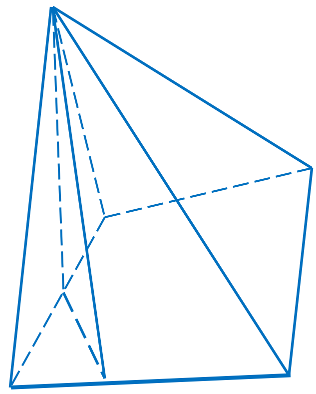
Mà $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta HAB} + S_{\Delta HAC} + S_{\Delta HBC} \Leftrightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}a(HN + NM + HP) \Leftrightarrow HN + NM + HP = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

$\Leftrightarrow (\tan 30^\circ + \tan 45^\circ + \tan 60^\circ)h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (\tan 30^\circ + \tan 45^\circ + \tan 60^\circ)h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = \frac{3a}{2(4+\sqrt{3})}.$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.h = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{2(4+\sqrt{3})} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8(4+\sqrt{3})}.$

Câu 13: Chọn C



Gọi H là trung điểm AB.

Theo giả thiết nên $SH \perp mp(ABCD)$, $SH = \frac{a}{2}$ và $BC + CD + DA = 8a.$

Gọi M, N, P là hình chiếu vuông góc của H lần lượt lên lên AD, DC, CB.

Suy ra: $((SAD,(ABCD) = SMH = 60^0$

$((SCD,(ABCD) = SNH = 60^0$

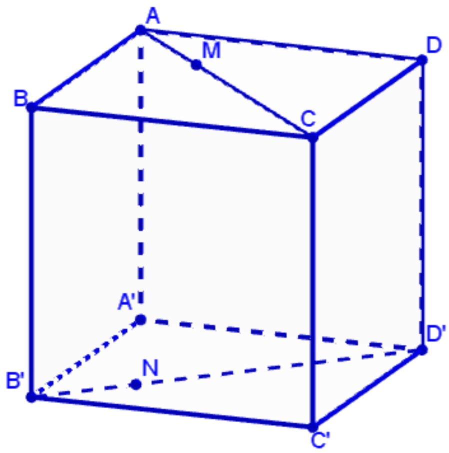
$((SCB,(ABCD) = SPH = 60^0.$

Từ đó: $HM = HN = HP = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Vậy: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH.(S_{\Delta HAD} + S_{\Delta HCD} + S_{\Delta HCB})$

$= \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{1}{2}(HM.DA + HN.CD + HP.CB) = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{1}{2}.\frac{a}{2\sqrt{3}}.8a = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}.$

Câu 14: Chọn B



Ta có: $(AM, NB') = 90^0$. $d(AM, B'N) = a$. Gọi $AM = x(x > 0)$.

Ta có: $V_{AMNB'} = \frac{1}{6} AM.B'N.\sin(AM, B'N).d(AM, B'N) = \frac{1}{6}x(a\sqrt{2} - x).a \le \frac{1}{6}a.\frac{(a\sqrt{2})^2}{4} = \frac{a^3}{12}$.

Câu 15: Chọn D

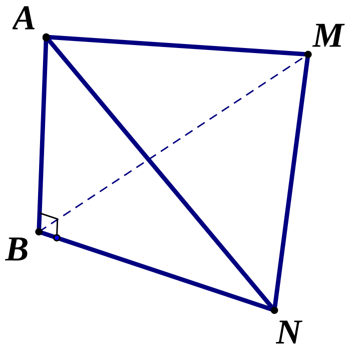
Ta có: $S_1 = S_{\Delta CAB} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}a^2; S_2 = S_{\Delta DAB} = \frac{2a.a}{2} = a^2$ và $\alpha = 30^0 = ((CAB),(DAB))$

Do đó $V = \frac{2S_1S_2.\sin\alpha}{3AB} = \frac{2.\sqrt{3}a^2.a^2.\sin 30^0}{3.2a} = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3$

Câu 16: Chọn B

Áp dụng công thức tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$

$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB.CD.d(AB;CD).\sin(AB,CD).$



Đặt $AM = x, BN = y\left(x, y > 0\right)$. Từ giả thiết ta có $x + 2y = 3a$.

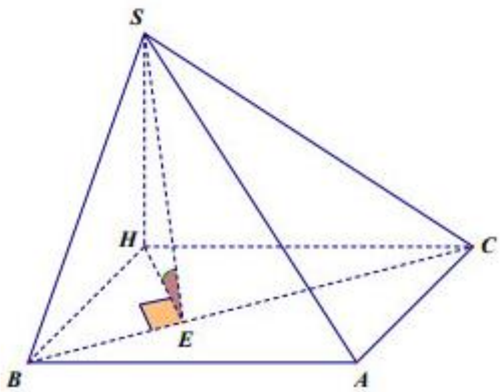
Khi đó thể tích của khối tứ diện $ABMN$ là:

$$V_{ABMN} = \frac{1}{6}AM.BN.\text{d}(AM;BN).\sin(AM,BN) = \frac{1}{6}.AM.BN.AB.\sin 90° = \frac{axy}{3}$$

$$= \frac{1}{3}a.\left(3a-2y\right).y = \frac{1}{6}a.\left(3a-2y\right).2y \le \frac{1}{6}a.\frac{\left(3a-2y+2y\right)^2}{4} = \frac{3a^3}{8}.$$

Do đó, $V_{\max} = \frac{3a^3}{8}$ khi $x = 2y = \frac{3a}{2}$.

Câu 17: Chọn D



Từ S vẽ $SH \perp \left(ABC\right)$. Ta có $\begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp \left(SBH\right) \Rightarrow AB \perp BH$.

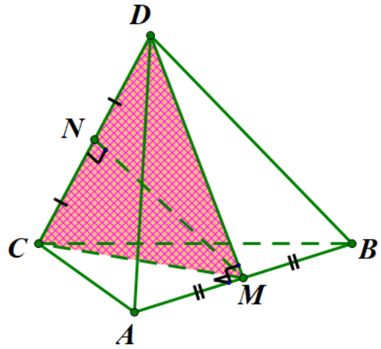
Chứng minh tương tự ta cũng có $AC \perp CH$.

Tam giác ABC vuông tại A do $AC^2 + AB^2 = BC^2$. Vậy suy ra $ABHC$ là hình chữ nhật.

Từ H vẽ $HE \perp BC$ thì $\left(\left(SBC\right),\left(ABC\right)\right) = SHE = 60° \Rightarrow SH = HE.\sqrt{3}$.

Trong đó $HE = \frac{HB.HC}{\sqrt{HB^2 + HC^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Vậy $SH = \frac{2\sqrt{15}}{5} \Rightarrow V = \frac{2\sqrt{15}}{15}$.

Câu 18: Chọn D



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Các tam giác DAB, CAB cân nên ta có $\begin{cases} DM \perp AB \\ CM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CMD) \Rightarrow AB \perp MN$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $CD \perp NM$.

Ta có $V_{ABCD} = V_{A.CDM} + V_{B.CDM} = \frac{1}{3}AM.S_{CDM} + \frac{1}{3}BM.S_{CDM} = \frac{1}{6}AB.CD.NM$.

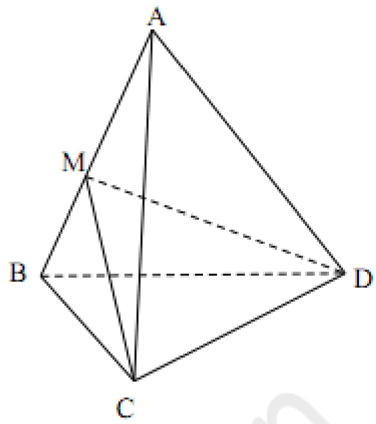
Với $AB = x$, $CD = 2 - x$ và

$$MN = \sqrt{MD^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(2-x)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{2-x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2x^2 - 12x + 12}}{2}.$$

Suy ra $V = \frac{1}{12}x(2-x)\sqrt{2x^2 - 12x + 12} = \frac{\sqrt{2}}{12} \Leftrightarrow x(2-x)\sqrt{2x^2 - 12x + 12} = \sqrt{2} \Rightarrow x = 2$.

Câu 19: Chọn D



Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} CM \perp AB \\ DM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (CDM)$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}AB.S_{CDM} = \frac{1}{6}AB.CM.DM.\sin CMD$$

Trong đó $AB = 2a$; $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}.2a = a\sqrt{3}$; $DM = \frac{AB}{2} = a$. Vậy $V = \frac{1}{6}.2a.a\sqrt{3}.a.\sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

Câu 20: Chọn C

Ta có công thức:

$$V=\frac{2.S_{\Delta ABD}.S_{\Delta ADC}.\sin\left(\left(ABD\right);\left(ADC\right)\right)}{3.BD}\Leftrightarrow \sin\left(\left(ABD\right);\left(ADC\right)\right)=\frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left(ABD\right);\left(ADC\right)=\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$$

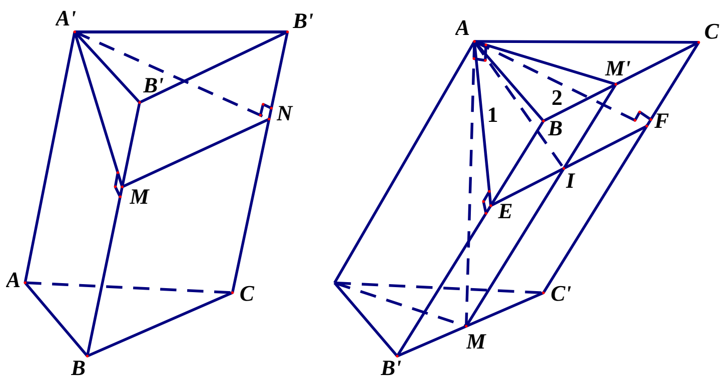
Câu 21: **Chọn A**

Ta có công thức diện tích đáy là $S_{ABCD}=\frac{AC.BD}{2}=24$

$$V=\frac{2.S_{\Delta ABCD}.S_{\Delta SAD}.\sin\left(\left(ABCD\right);\left(ADC\right)\right)}{3.AD}=24$$

Câu 50 : Chọn D

Bổ đề : Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ vuông góc các cạnh của lăng trụ và tạo với lăng trụ một thiết diện có diện tích S. Khi đó $V_{LT}=AA'.S_{A'MN}$.



Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BB' và CC'.

Gọi M' là trung điểm của BC, I là giao điểm của MM' và $EF\Rightarrow I$ là trung điểm của EF.

Ta có: $\begin{cases}AE\perp BB'\\ AF\perp BB'\left(do\, AF\perp CC'\right)\end{cases}\Rightarrow BB'\perp\left(AEF\right)\Rightarrow BB\perp EF$

$$\Rightarrow d\left(C,BB'\right)=d\left(F,BB'\right)=EF=\sqrt{5}$$

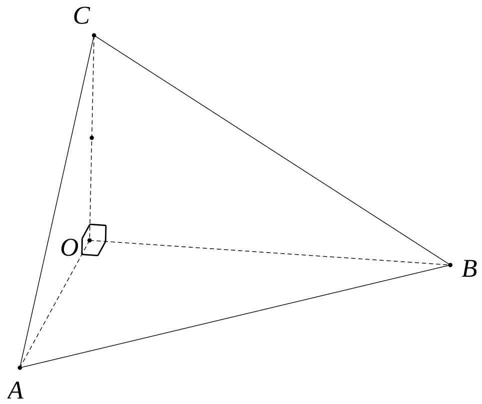
ΔAEF vuông tại A $\Rightarrow AI=\frac{1}{2}EF=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Mà $MM'\perp AI$.

$\Rightarrow \Delta AMM'$ vuông tại A, AI là đường cao $\Rightarrow AI=\frac{AM.AM'}{\sqrt{AM^2+AM'^2}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$

Tam giác $AA'M$ vuông tại $M\Rightarrow AA'=\sqrt{AM^2+A'M^2}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$

$$V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{AEF}=\frac{2\sqrt{15}}{3}.\frac{1}{2}.1.2=\frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

Câu 22: **Chọn B**

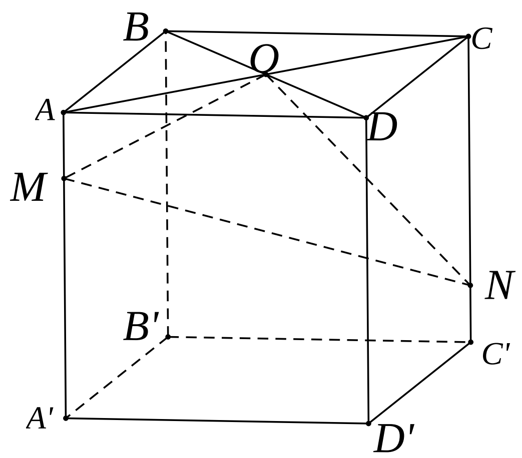


Ta có $\begin{cases} 2S_1 = bc \\ 2S_2 = ca \\ 2S_3 = ab \end{cases}$; $\tan\alpha = \dfrac{a\sqrt{b^2+c^2}}{bc} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \dfrac{bc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$.

Khi đó, $S = \dfrac{S_1}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{2} = \sqrt{S_1^{\,2}+S_2^{\,2}+S_3^{\,2}} \ge \sqrt{\dfrac{1}{3}\left(S_1+S_2+S_3\right)^2} = 1$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \sqrt[4]{\dfrac{4}{3}} \Rightarrow V = \dfrac{\left(\sqrt[4]{\dfrac{4}{3}}\right)^3}{6} = \dfrac{\sqrt[4]{12}}{9}$.

Câu 23: Chọn B



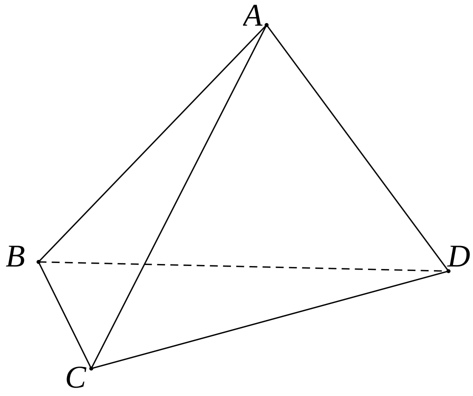
Đặt độ dài cạnh khối lập phương là x và O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $BD \perp (ACNM) \Rightarrow V_{BDMN} = \dfrac{1}{3}S_{MON}.BD$.

$S_{OMN} = S_{ACNM} - S_{OAM} - S_{OCN} = \dfrac{AM+CN}{2}\cdot AC - \dfrac{AM.OA}{2} - \dfrac{CN.OC}{2} = \dfrac{ax\sqrt{2}}{2}$

$V_{BDMN} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{ax\sqrt{2}}{2}\cdot x\sqrt{2} = 2a^3 \Leftrightarrow x = a\sqrt{6}$.

Câu 24: Chọn B

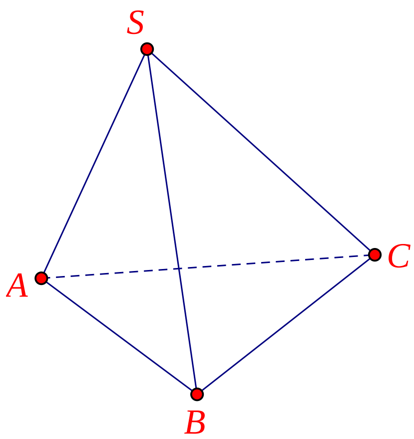


Ta có $S_1 = S_{ABD} = \dfrac{\left(a\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$, $S_2 = S_{CAB} = \dfrac{AB^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$

Vì vậy, $V = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3AB} = \dfrac{2\cdot\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}\cdot\dfrac{3a^2}{4}\cdot\sin\alpha}{3\sqrt{3}a} = \dfrac{3a^3.\sin\alpha}{8} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Câu 25: Chọn A



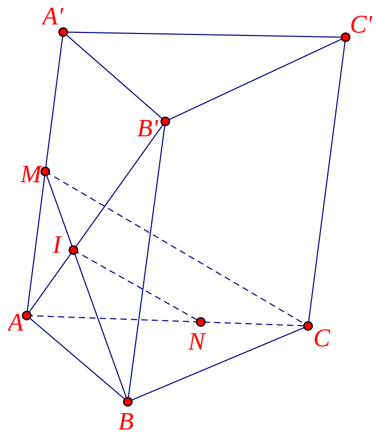
Áp dụng công thức tổng quát khi biết độ dài 6 cạnh hoặc dùng công thức góc tại đỉnh S, ta có

$\cos ASB = \dfrac{SA^2 + SB^2 - AB^2}{2SA.SB} = -\dfrac{23}{42}$, $\cos BSC = \dfrac{SB^2 + SC^2 - BC^2}{2SB.SC} = -\dfrac{47}{70}$

$\cos ASC = \dfrac{SA^2 + SC^2 - AC^2}{2SA.SC} = -\dfrac{1}{15}$.

Vậy $V = \dfrac{3.5.7}{6}\sqrt{1 + 2\left(-\dfrac{23}{42}\right)\left(-\dfrac{47}{70}\right)\left(-\dfrac{1}{15}\right) - \left(-\dfrac{23}{42}\right)^2 - \left(-\dfrac{47}{70}\right)^2 - \left(-\dfrac{1}{15}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2159}}{6}\left(cm^3\right)$.

Câu 26: Chọn A



Gọi $I = BM \cap AB', IN//CM\left(N \in BC\right)$ có $CM//\left(AB'N\right)$

$\Rightarrow d\left(CM, AB'\right) = d\left(C,\left(AB'N\right)\right) = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Lại có $\dfrac{IM}{IB} = \dfrac{AM}{BB'} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{NC}{NB} = \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d\left(B,\left(AB'N\right)\right) = 2d\left(C,\left(AB'N\right)\right) = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

Ta có $\cos ABN = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2}$.

Đặt $BB' = x$, thì $V_{B.AB'N} = \dfrac{1}{6}.1.\dfrac{4}{3}.x.\sqrt{1+2-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.0-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-0^2} = \dfrac{x\sqrt{2}}{9}$.

Mà $AB' = \sqrt{x^2+x+1}$ $BN = \dfrac{4}{3} \Rightarrow NB' = \sqrt{x^2+\dfrac{16}{9}}$,

$AN = \sqrt{AB^2+BN^2-2AB.BN.\cos ABN} = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$.

$$\cos B'AN = \dfrac{x^2+x+1+\dfrac{13}{9}-\left(x^2+\dfrac{16}{9}\right)}{\dfrac{2\sqrt{13\left(x^2+x+1\right)}}{3}} = \dfrac{3x+2}{2\sqrt{13\left(x^2+x+1\right)}}$$

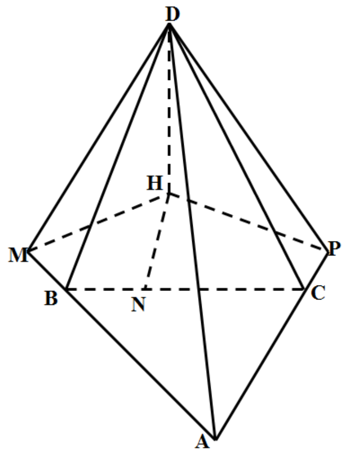
$$\Rightarrow \sin B'AN = \sqrt{1-\dfrac{\left(3x+2\right)^2}{52\left(x^2+x+1\right)}}$$

$$\Rightarrow S_{AB'N} = \dfrac{\sqrt{13\left(x^2+x+1\right)}}{6}.\sqrt{1-\dfrac{\left(3x+2\right)^2}{52\left(x^2+x+1\right)}} = \dfrac{\sqrt{43x^2+40x+48}}{12}.$$

Do đó $d\left(B,\left(AB'N\right)\right) = \dfrac{3V_{B.AB'N}}{S_{ANB'}} = \dfrac{\dfrac{x\sqrt{2}}{3}}{\dfrac{\sqrt{43x^2+40x+48}}{12}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow x = 4$.

Vậy $V_{B.AB'N} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ và $\left.\begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp DM$.

Câu 27: Chọn D



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, BC, CA

$DMH = DNH = DPH = 60°$ (góc của các mặt $(DAB),(DBC),(DCA)$ với (ABC))

$\Rightarrow HM = HN = HP$ $\Rightarrow H$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC.

Gọi r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp góc $A \Rightarrow r_a = HM = HN = HP$

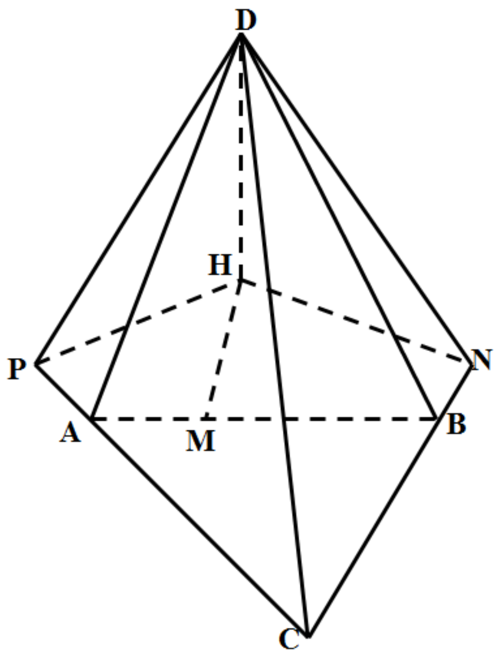
Ta có $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC}{2} = 6a^2$

Ta có $S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HAC} - S_{HBC} = \dfrac{HM.AB}{2} + \dfrac{HP.AC}{2} - \dfrac{HN.BC}{2} = r_a \dfrac{b+c-a}{2} = r_a(p-a)$

$\Rightarrow r_a = \dfrac{S_{ABC}}{p-a} = 6a$. Lại có $\tan DMH = \dfrac{DH}{HM}$ $\Rightarrow DH = r_a \tan 60° = 6\sqrt{3}a$.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3} DH.S_{ABC} = 12\sqrt{3}a^3$.

Câu 28: Chọn C



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, BC, CA

$DMH = DNH = DPH = 60°$ (góc của các mặt $(DAB),(DBC),(DCA)$ với (ABC))

$\Rightarrow HM = HN = HP$ $\Rightarrow H$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc C của tam giác ABC.

Gọi r_c là bán kính đường tròn bàng tiếp góc $C \Rightarrow r_c = HM = HN = HP$

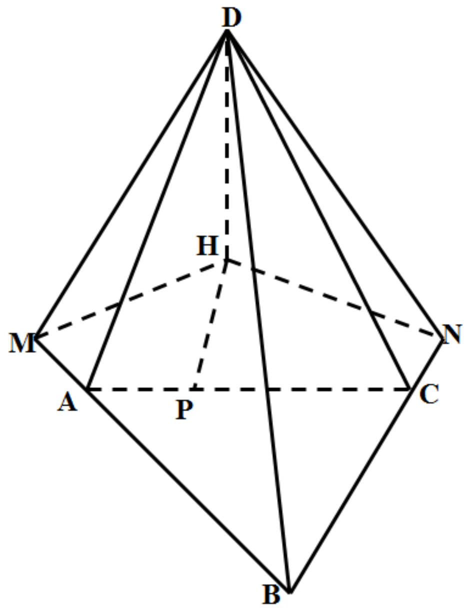
Ta có $S_{ABC}=\dfrac{AB.AC}{2}=6a^2$

Ta có $S_{ABC}=S_{HAC}+S_{HBC}-S_{HAB}=\dfrac{HP.AC}{2}+\dfrac{HN.BC}{2}-\dfrac{HM.AB}{2}=r_c\dfrac{a+b-c}{2}=r_c\left(p-c\right)$

$\Rightarrow r_c=\dfrac{S_{ABC}}{p-c}=2a$. Lại có $\tan DMH=\dfrac{DH}{HM}$ $\Rightarrow DH=r_c\tan 60^\circ=2\sqrt{3}a$.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V=\dfrac{1}{3}DH.S_{ABC}=4\sqrt{3}a^3$.

Câu 29: Chọn B



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB, BC, CA

$DMH=DNH=DPH=60^\circ$ (góc của các mặt $\left(DAB\right),\left(DBC\right),\left(DCA\right)$ với $\left(ABC\right)$)

$\Rightarrow HM=HN=HP$ $\Rightarrow H$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc B của tam giác ABC.

Gọi r_b là bán kính đường tròn bàng tiếp góc $B\Rightarrow r_b=HM=HN=HP$

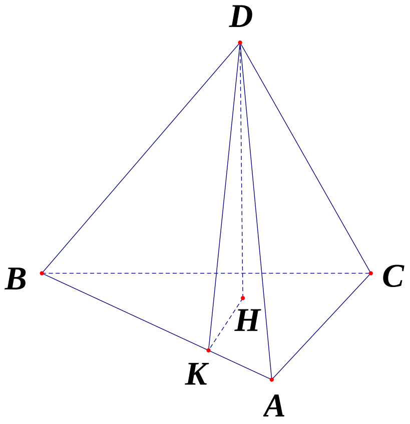
Ta có $S_{ABC}=\dfrac{AB.AC}{2}=6a^2$

Ta có $S_{ABC}=S_{HAB}+S_{HBC}-S_{HAC}=\dfrac{HM.AB}{2}+\dfrac{HN.BC}{2}-\dfrac{HP.AC}{2}=r_b\dfrac{a+c-b}{2}=r_b\left(p-b\right)$

$\Rightarrow r_b=\dfrac{S_{ABC}}{p-b}=3a$. Lại có $\tan DMH=\dfrac{DH}{HM}$ $\Rightarrow DH=r_b\tan 60^\circ=3\sqrt{3}a$.

Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V=\dfrac{1}{3}DH.S_{ABC}=6\sqrt{3}a^3$.

Câu 30: Chọn A



Vì góc giữa các mặt phẳng $(DAB),(DBC),(DCA)$ và mặt phẳng (ABC) bằng nhau và H nằm trong tam giác ABC nên H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Tam giác ABC vuông tại A, ta có $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=5a;\ S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AB.AC=6a^2$.

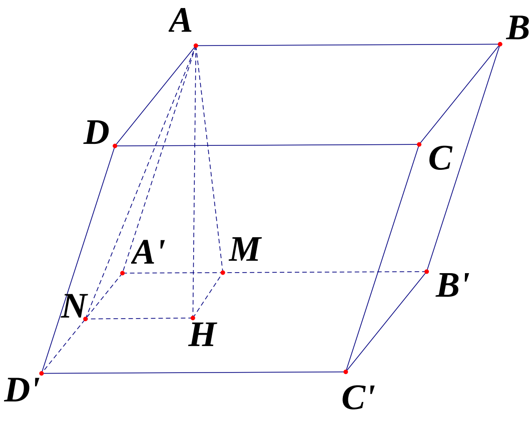
Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB+AC+BC}{2}.r\Leftrightarrow 6a^2=6a.r\Leftrightarrow r=a$.

Gọi K là hình chiếu của H trên cạnh AB, suy ra góc giữa mặt phẳng (DAB) và mặt phẳng (ABC) là $DKH\Rightarrow DKH=60^\circ$.

Tam giác DHK vuông tại H, ta có $DH=HK.\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.DH.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.6a^2=2\sqrt{3}a^3$.

Câu 31: Chọn A



Gọi H là hình chiếu của điểm A trên mặt đáy $(A'B'C'D')$, M,N lần lượt là hình chiếu của H trên các cạch $A'B',A'D'$ suy ra góc giữa hai mặt bên $(ABB'A),(ADD'A')$ với đáy lần lượt là $AMH,ANH\Rightarrow AMH=45^\circ,\ ANH=60^\circ$.

Đặt $AH=x$

Tam giác AHM vuông cân tại H, ta có $HM=AH=x$

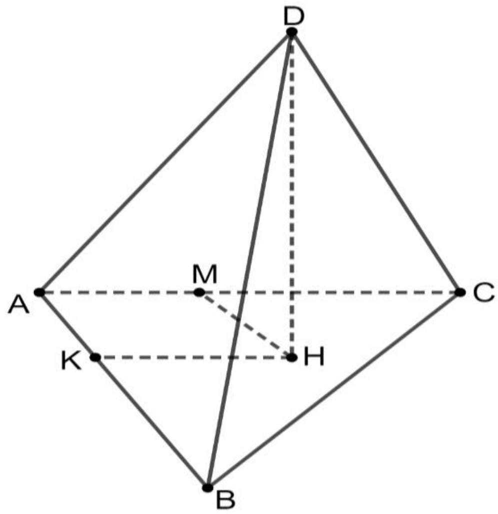
Tam giác AHN vuông tại H, ta có $HN=\dfrac{AH}{\tan 60^\circ}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

Theo cách dựng ta có tứ giác $A'MHN$ là hình chữ nhật, suy ra $A'H=\sqrt{HN^2+HM^2}=\dfrac{2x}{\sqrt{3}}$

Tam giác AHA' vuông tại H, ta có $AA'^2 = AH^2 + HA'^2 \Leftrightarrow 1 = x^2 + \frac{4x^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{21}}{7}\left(x > 0\right)$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AH.S_{ABCD} = \frac{\sqrt{21}}{7}.\sqrt{3}.\sqrt{7} = 3$.

Câu 32: Chọn D



Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 6a^2$.

Hạ $DH \perp (ABC)$ $\left(H \in (ABC)\right), HK \perp AB$ $(K \in AB), HM \perp AC$ $(M \in AC)$

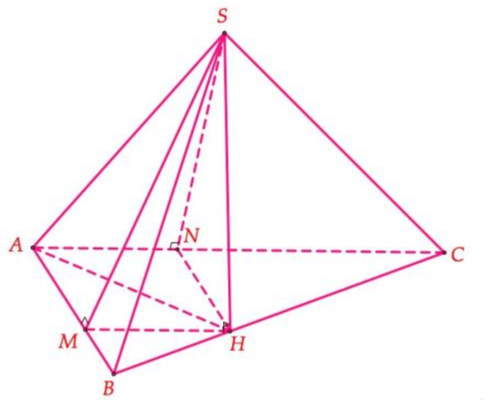
Theo định lí ba đường vuông góc chung, ta có $AB \perp DK, AC \perp DM \Rightarrow DKH = 45°, DMH = 60°$
Và tứ giác $HMAK$ là hình chữ nhật với $AK = HM$.

Đặt $h = DH$, ta có $HM = h\cot 60° = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

Và $AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{36a^2 - \left(\frac{h}{\sin 45°}\right)^2} = \sqrt{36a^2 - 2h^2}$.

Vậy $\frac{h}{\sqrt{3}} = \sqrt{36a^2 - 2h^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{108}{7}}a \Rightarrow V = \frac{Sh}{3} = \frac{12\sqrt{21}a^3}{7}$.

Câu 33: Chọn A



Kẻ $SH \perp BC$ $(H \in BC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

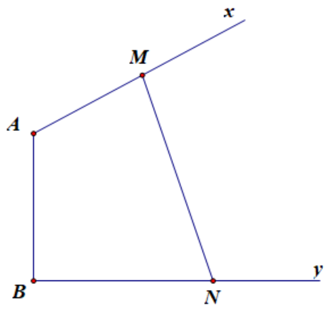
Kẻ $HN \perp AB$ $(M \in AB), HN \perp AC$ $(N \in AC) \Rightarrow AB \perp (SHM), AC \perp (SHN)$ và $SNH = SMH = 60°$.

Ta có $S=\frac{ABAC}{2}=\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$. Với $h=SH$ và $HM=HN=h\cot 60^\circ=\frac{h}{\sqrt{3}}$.

Ta có $S=S_{HAB}+S_{HAC}=\frac{1}{2}\left(AB.HM+AC.HN\right)=\frac{h}{2\sqrt{3}}\left(\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}a^2}{8}\Leftrightarrow h=\frac{3a}{2\left(\sqrt{3}+1\right)}$.

Vậy $V=\frac{Sh}{3}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a^2}{8}.\frac{3a}{2\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)a^3}{32}$.

Câu 34: Chọn B



Đặt $AM=x$, $BN=y$. Ta có $V=\frac{AM.BN.\sin 60^\circ}{6}=\frac{axy\sqrt{3}}{12}$.

Ta tìm mối quan hệ giữa x và y theo điều kiện $MN=2a$.

Ta có $MN^2=\overrightarrow{MN}^2=\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}\right)^2=\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BN}\right)^2$

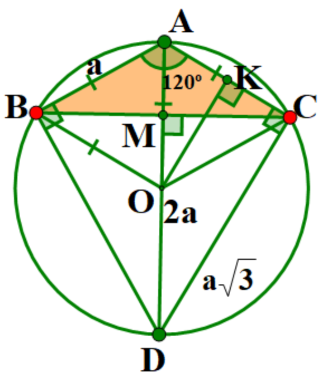
$=AM^2+BN^2+AB^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BN}-2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN}$

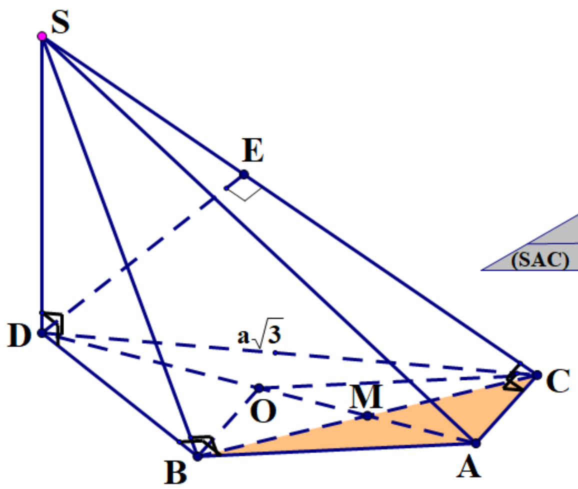
$=x^2+a^2+y^2-2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN}\;=x^2+a^2+y^2\pm xy=4a^2$.

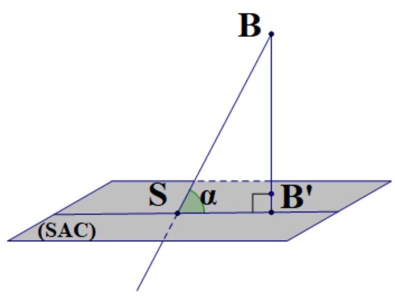
$\Leftrightarrow 3a^2=x^2+y^2\pm xy\geq 2xy\pm xy\geq xy\;\Leftrightarrow V\leq\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Trong đó $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN}=2AM.BN.\cos\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN}\right)=\pm xy$.

Câu 35: Chọn A







Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $OA=OB=OC=AB=a$.

Gọi D là hình chiếu của S trên (ABC) thì $SD\perp AB$, $SD\perp AC$.

$\begin{cases} AB \perp SD,\ SD \perp AC \\ SBA = SCA = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow AB \perp BD,\ AC \perp CD \Rightarrow DB = DC = a\sqrt{3},\ AD = 2a$.

Đặt $SD = x$. Điều kiện: $0 < x < 2a$.

$OB // AC \Rightarrow \mathrm{d}(B;(SAC)) = \mathrm{d}(O;(SAC)) = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(D;(SAC)) = \dfrac{xa\sqrt{3}}{2\sqrt{3a^2+x^2}}$.

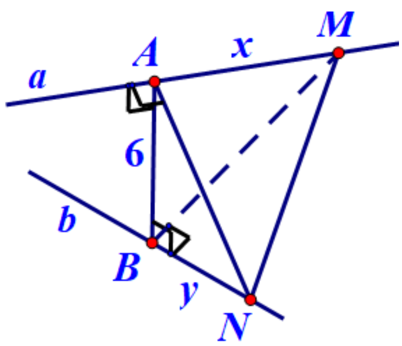
$SB = \sqrt{SD^2 + DB^2} = \sqrt{3a^2+x^2}$..

Theo đề $\sin\left(SB,(SAC)\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \dfrac{d(B,(SAC))}{SB} = \dfrac{\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow d(B,(SAC)) = \dfrac{\sqrt{3}}{8}SB.$

$\dfrac{xa\sqrt{3}}{2\sqrt{3a^2+x^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{3a^2+x^2} \Leftrightarrow x^2 - 4ax + 3a^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \quad (\text{nhan}) \\ x = 3a \quad (\text{loai}) \end{array}\right.$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SD = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 36: Chọn A



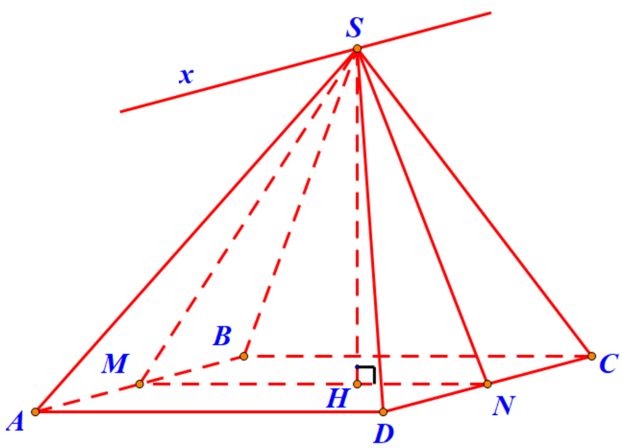
Áp dụng công thức tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}AB.CD.d(AB;CD).\sin(AB,CD).$

Ta có thể tích của khối tứ diện $ABMN$ là:

$V_{ABMN} = \dfrac{1}{6}AM.BN.\mathrm{d}(a;b).\sin(\mathrm{a},\mathrm{b}) = \dfrac{1}{6}.AM.BN.MN.\sin 30^\circ = \dfrac{xy\sqrt{3}}{2}$.

Câu 37: Chọn C



S là điểm chung của (SAB) và (SCD), đồng thời $AB // CD$.

Khi đó kẻ $Sx // AB // CD$ thì Sx là giao tuyến của (SAB) và (SCD).

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD.

$\Delta SAB, \Delta SCD$ là các tam giác cân tại S nên $SM \perp AB$, $SN \perp CD$.

Mặt khác $SM \perp CD \Rightarrow SM \perp (ABCD) \Rightarrow (SMN) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến MN.

Kẻ $SH \perp MN (H \in MN) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

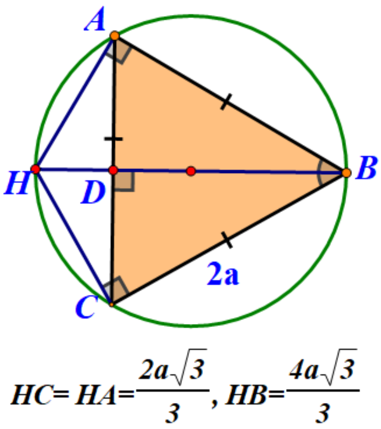
$SM \perp Sx, SN \perp Sx$ nên góc $\left[(SAB);(SCD)\right] = (SM;SN) = MSN = 90^0$.

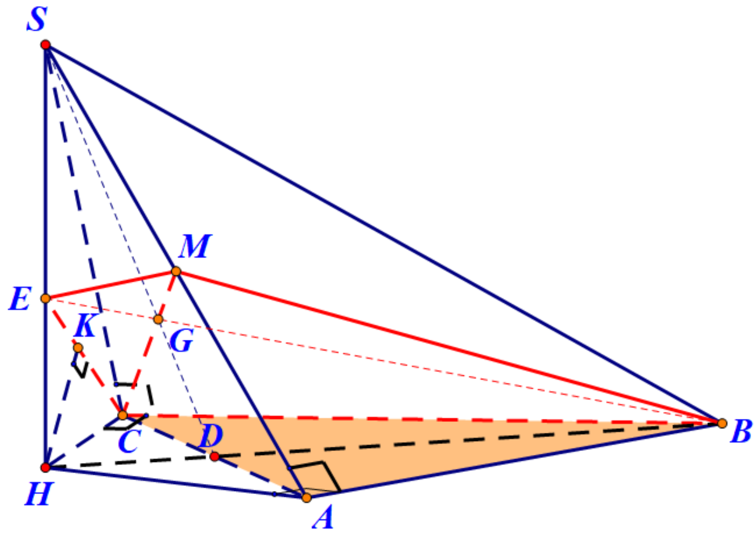
$$\frac{7a^2}{10} = S_{SAB} + S_{SCD} = \frac{1}{2}AB.SM + \frac{1}{2}CD.SN \xrightarrow{AB=CD} \frac{7a^2}{10} = \frac{1}{2}AB(SM+SN) \Rightarrow SM+SN = \frac{7a}{5}.$$

$$SM^2 + SN^2 = MN^2 = a^2 \Rightarrow SM.SN = \frac{(SM+SN)^2 - (SM^2+SN^2)}{2} = \frac{12a^2}{25}.$$

Vậy $SH = \dfrac{SM.SN}{MN} = \dfrac{12a}{25} \longrightarrow V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \dfrac{4a^3}{25}$.

Câu 38: Chọn A





Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC). Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SCH) \Rightarrow BC \perp HC.$$ Tương tự ta có $BA \perp AH$.

Suy ra H thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC. Do đó, H thuộc đường thẳng BD sao cho $\overrightarrow{HD} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DB}$, với D là trung điểm cạnh CD.

Ta có tứ giác $ABCH$ nội tiếp đường tròn bán kính BH.

ΔABC đều cạnh $2a \Rightarrow BD = a\sqrt{3}$.

Lại có: $\dfrac{BD}{BH} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow BH = \dfrac{4BD}{3} = \dfrac{4}{3}a\sqrt{3}; HA = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi $G = CM \cap SD$, $E = BD \cap SH$ thì G là trọng tâm ΔSAC.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ΔSDH với ba điểm E, G, B thẳng hàng, ta có $\dfrac{SE}{EH}.\dfrac{HB}{BD}.\dfrac{DG}{GS} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{SE}{EH}.\dfrac{4}{3}.\dfrac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{SE}{EH} = \dfrac{3}{2}$.

$$\mathrm{d}(A;(BCM)) = \mathrm{d}(S;(BCM)) = \frac{SE}{HE}\mathrm{d}(H;(BCM)) \Rightarrow \mathrm{d}(H;(BCM)) = \frac{2}{3}\mathrm{d}(A;(BCM)) = \frac{4a\sqrt{21}}{21}.$$

Gọi K là hình chiếu của H trên CE thì K là hình chiếu của H trên (BCM)

$\Rightarrow CK = d(H;(BCM)) = \dfrac{4a\sqrt{21}}{21}$.

ΔHCE vuông tại H, đường cao $HK \Rightarrow \dfrac{1}{HE^2} = \dfrac{1}{HK^2} - \dfrac{1}{HC^2} = \dfrac{9}{16a^2} \Rightarrow HE = \dfrac{4a}{3}$.

$SH = \dfrac{5}{2}HE = \dfrac{10a}{3}$.

Vậy thể tích của khối $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SH = \dfrac{10\sqrt{3}a^3}{9}$.

Câu 39: Chọn A

Áp dụng công thức tính thể tích của tứ diện gần đều, ta có:

$$V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2}}{12}.\sqrt{\left(x^2+y^2-z^2\right)\left(x^2+z^2-y^2\right)\left(y^2+z^2-x^2\right)} = \frac{\sqrt{2}}{12}.\sqrt{\left(12-2z^2\right)\left(12-2y^2\right)\left(12-2x^2\right)}$$

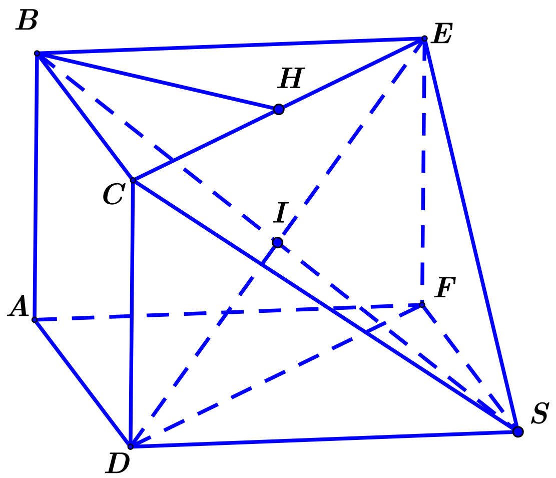
$$= \frac{\sqrt{2}}{12}.2\sqrt{2}.\sqrt{\left(6-z^2\right)\left(6-y^2\right)\left(6-x^2\right)} = \frac{1}{3}.\sqrt{\left(6-z^2\right)\left(6-y^2\right)\left(6-x^2\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\left(6-z^2\right)\left(6-y^2\right)\left(6-x^2\right) \le \left(\frac{6-z^2+6-y^2+6-x^2}{3}\right)^3 = 2^3 = 8.$$

Do đó: $V_{S.ABC} \le \dfrac{1}{3}.\sqrt{8} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 2$.

Câu 40: Chọn D



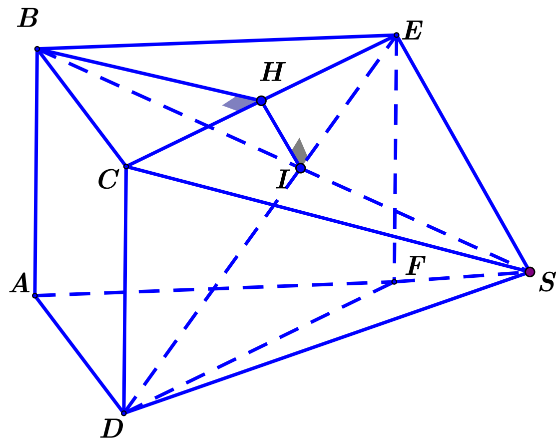
Ta có $ADE.BCF$ là một lăng trụ đứng có đáy ΔADE là tam giác vuông cân tại A với $AD = AE = 1$, cạnh bên $AB = 1$.

Gọi I là trung điểm DE thì $BI = SI$ nên $d\left(S;\left(ADE\right)\right) = d\left(B;\left(ADE\right)\right) = BH$.

Ta có $V_{S.CDFE} = \dfrac{1}{3}.d\left(S,\left(CDEF\right)\right).S_{CDFE} = \dfrac{1}{3}.BH.CD.CE = \dfrac{1}{3}$.

$V_{BCE.ADF} = \dfrac{1}{2}.BC.BE.AB = \dfrac{1}{2}$. Khi đó: $V_{ABCDSEF} = V_{BCE.ADF} + V_{S.CDEF} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$.

Câu 41: Chọn D



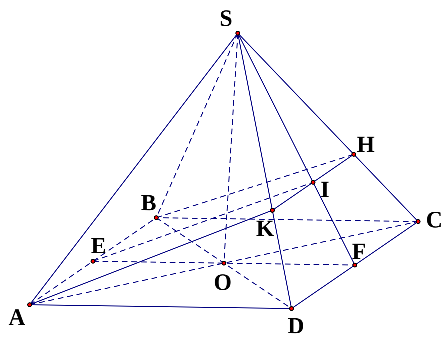
Ta có $ADE.BCF$ là một lăng trụ đứng có đáy ΔADE là tam giác vuông cân tại A với $AD = AE = 1$, cạnh bên $AB = 1$, do đó $V_{BCE.ADF} = \frac{1}{2}.BC.BE.AB = \frac{1}{2}$.

Gọi H là trung điểm CE và I là hình chiếu vuông góc của H trên DE, Khi đó ta có BI vuông góc DE với tại I và $BI = SI$ nên $d\left(S;\left(ADE\right)\right) = d\left(B;\left(ADE\right)\right) = BH$.

Ta có $V_{S.CDFE} = \frac{1}{3}.d\left(S,\left(CDEF\right)\right).S_{CDFE} = \frac{1}{3}.BH.CD.CE = \frac{1}{3}$.

Khi đó: $V_{ABCDSEF} = V_{BCE.ADF} + V_{S.CDEF} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

Câu 42: Chọn A



Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD.

Chiều cao của khối chóp là $h = \frac{1}{2}\tan 75° = \frac{1}{2}\tan\left(45° + 30°\right) = \frac{\tan 45° + \tan 30°}{2\left(1 - \tan 45° \tan 30°\right)} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Và $SE = \sqrt{h^2 + OE^2} = \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Thể tích khối chóp tứ giác đều là $V_0 = \frac{Sh}{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $\left(SEF\right) \perp AB$. Kẻ $EI \cap SF = I$ sao cho $IEF = 45°$ khi đó $\left(P\right) \equiv \left(ABI\right)$ và $\left(P\right) \cap \left(SCD\right) = HK//CD//AB$.

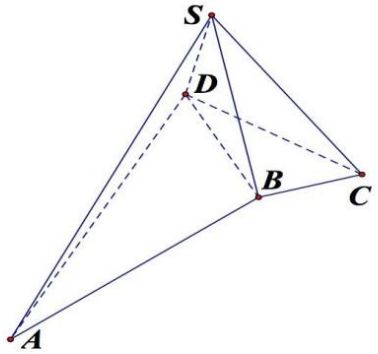
Trong tam giác $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp \left(SAC\right) \Rightarrow BD \perp SH$ có:

$$\frac{IS}{IF}=\frac{S_{SEI}}{S_{IEF}}=\frac{\sin SEI}{\sin IEF}=\frac{SE.\sin 30^\circ}{FE.\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}.\frac{1}{2}}{1.\frac{\sqrt{2}}{2}}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{SI}{SF}=\frac{5+2\sqrt{3}}{13}.$$

Do đó theo tỉ số thể tích có:

$$V_S=\frac{SH}{SC}.\left(\frac{1}{2}V_0\right)+\frac{SK}{SD}.\left(\frac{1}{2}V_0\right)=\frac{SI}{SF}.\frac{1}{2}V_0+\frac{SI}{SF}.\frac{1}{2}V_0=\frac{SI}{SF}.V_0=\frac{16+9\sqrt{3}}{78}.$$

Câu 43: Chọn A



Có $BC=\sqrt{10}a$, $S_{ABC}=\frac{3a^2}{2}$ và áp dụng công thức thể tích tứ diện khi biết ba góc của mặt bên tạo với đáy.

$$V=\frac{2S^2}{3\left(a\cot\alpha+b\cot\beta+c\cot\gamma\right)}=\frac{2\left(\frac{3a^2}{2}\right)^2}{3\left(\sqrt{10}a.0+a\cot\alpha+3a\cot\beta\right)}$$

$$=\frac{3a^3}{2\left(\cot\alpha+3\tan\alpha\right)}\le\frac{3a^3}{4\sqrt{\cot\alpha.3\tan\alpha}}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

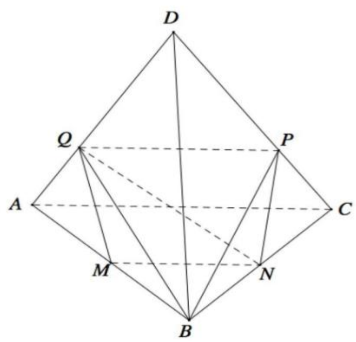
Câu 44: Chọn B

Ta có thể tích của khối tứ diện đều cạnh $a=1$ là $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Ta có $\frac{V_{S.ABD}}{V}=SA.SB.SD=12\Rightarrow V_{S.ABD}=\sqrt{2}$ và $\frac{V_{S.CBD}}{V}=SC.SB.SD=6\Rightarrow V_{S.CBD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 45: Chọn B



Ta có thiết diện của (MNP) và tứ diện là hình thang $MNPQ$ trong đó $MN \parallel PQ$

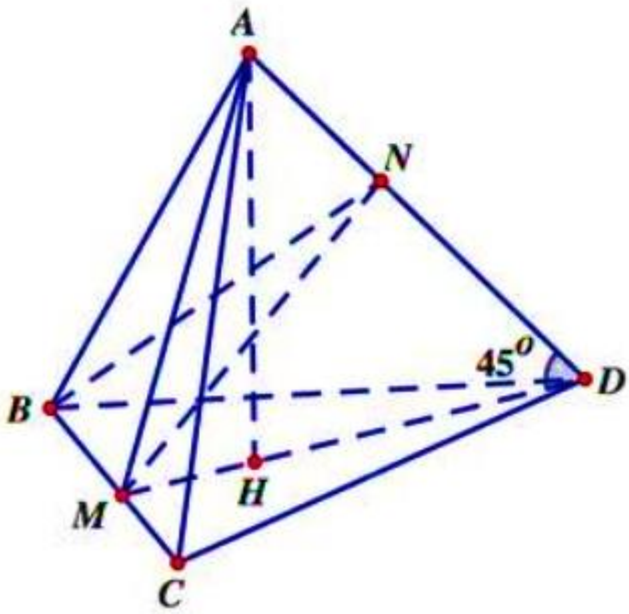
Có $V_{BMNPQD} = V_{D.BPQ} + V_{B.MNQ} + V_{Q.BNP}$; $V_{D.BPQ} = \frac{4}{9}V_{ABCD}$

$V_{Q.MBN} = \frac{1}{3}S_{MBN}.d(Q,(MBN)) = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}S_{ABC}.\frac{1}{3}d(D,(ABC)) = \frac{1}{12}V_{ABCD}$

$V_{Q.BPN} = \frac{1}{3}S_{PBN}.d(Q,(PBN)) = \frac{1}{3}.\frac{1}{6}S_{BCD}.\frac{2}{3}d(A,(PBN)) = \frac{1}{9}V_{ABCD}$

$V_{BMNPQD} = \frac{23}{36}V_{ABCD} = \frac{23}{36}.\frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{23\sqrt{2}}{432}$.

Câu 46: Chọn D



Ta có $\overrightarrow{AD}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\overrightarrow{AB} = \frac{AD^2 + AC^2 - CD^2}{2} - \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2} = 0 \Rightarrow AD \perp BC$

Gọi H là hình chiếu của A lên (BCD); $M = DH \cap BC$ suy ra M nằm giữa BC.

Do $\left.\begin{matrix} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp DM$.

Trong (ADM) dựng $MN \perp AD$ tại N suy ra MN là đoạn vuông góc chung của AD, BC

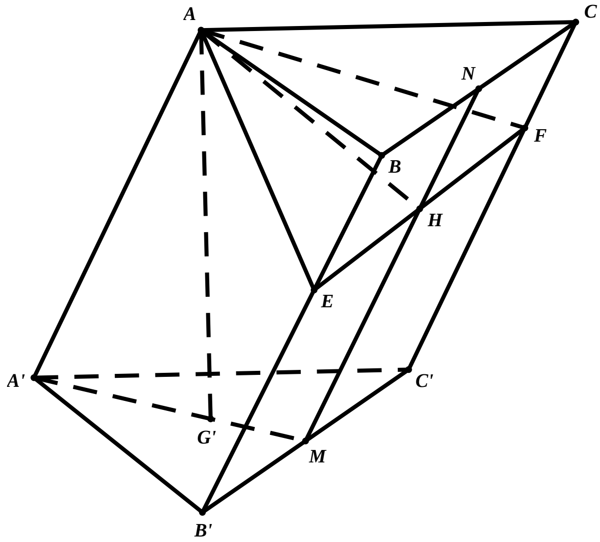
$\Rightarrow MN = \frac{5a}{4}$. Ta thấy góc giữa AD và (BCD) là $\widehat{ADH} = 45^0$.

Ta có $DM = MN\sqrt{2} = \frac{5a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow BM = \sqrt{BD^2 - MN^2} = \frac{a\sqrt{110}}{4}$.

$\Rightarrow AN = \sqrt{AB^2 - BN^2} = \sqrt{AB^2 - (BM^2 + MN^2)} = \frac{3a}{4}; DN = MN = \frac{5a}{4}$.

Do đó $AD = AN + DN = 2a$.

Câu 47: Chọn D



Kẻ $AE \perp BB'$, $AF \perp CC' \Rightarrow (AEF) \perp AA' \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{AEF}$.

Ta có $AE = d(A, BB') = 1$, $AF = d(A, CC') = \sqrt{3}$, $EF = d(C, BB') = 2$.

Vì tam giác AEF vuông tại A và $S_{AEF} = \frac{1}{2}AE.AF = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh $B'C'$, BC và $H = MN \cap EF \Rightarrow AH \perp MN$ (do $MN//AA'$) và H là trung điểm $EF \Rightarrow AH = \frac{EF}{2} = 1$.

Ta có $A'G' = \frac{4}{3} \Rightarrow A'M = \frac{3}{2}A'G' = 2$.

Hình bình hành $AA'MN$ có $S_{AA'MN} = AG'.A'M = AH.MN \Leftrightarrow 2\sqrt{AA'^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = 1.AA'$

$\Leftrightarrow AA' = \frac{8\sqrt{3}}{9}$. Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{8\sqrt{3}}{9} = \frac{4}{3}$.

Câu 48: Chọn D

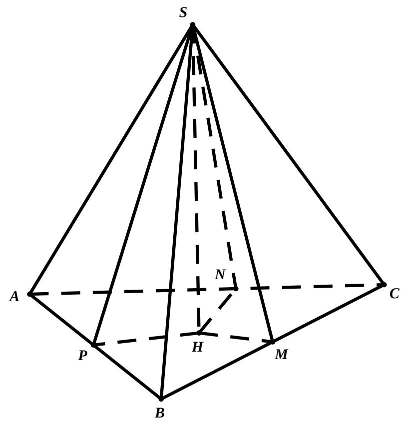
Ta có $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{4}$ và $S_{ABA'} = \frac{1}{2}S_{ABB'A'} = \frac{1}{2}BB'.d(A, BB') = \frac{1}{2}.2.1 = 1$.

Và $S_{ACA'} = \frac{1}{2}S_{ACC'A'} = \frac{1}{2}.CC'.d(A, CC') = \frac{1}{2}.2.\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $\sin\left((ABB'A'),(ACC'A')\right) = \frac{3AA'.S_{A'.ABC}}{2.S_{ABA'}.S_{ACA'}} = \frac{3.2.\frac{1}{4}}{2.1.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $\cos\left((ABB'A'),(ACC'A')\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

Câu 49: Chọn B



Diện tích mặt đáy $S=\frac{\sqrt{3}}{4}$; diện tích các mặt bên (SBC); (SCA), (SAB) kí hiệu lần lượt là S_1, S_2, S_3. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) và M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên BC, CA, AB. Khi đó các góc SMH, SNH, SPH lần lượt là góc giữa các mặt bên (SBC); (SCA), (SAB) và đáy (ABC).

Theo định lý diện tích hình chiếu vuông góc, ta có: $S_1=\frac{S_{HBC}}{\cos SMC}=\frac{\frac{1}{2}.BC.HM}{\frac{HM}{SM}}=\frac{1}{2}BC.HM$

$=\frac{1}{2}SM=\frac{1}{2}\sqrt{h^2+HM^2}$. Tương tự có $S_2=\frac{1}{2}\sqrt{h^2+HN^2}$, $S_3=\frac{1}{2}\sqrt{h^2+HP^2}$.

Mặt khác $3V=S.d\left(S,(ABC)\right)=S_1.d\left(A,(SBC)\right)=S_2.d\left(B,(SCA)\right)=S_3.d\left(C,(SAB)\right)$.

Suy ra $\frac{\sqrt{3}}{4}h=\frac{\sqrt{6}}{8}\sqrt{h^2+HM^2}=\frac{\sqrt{15}}{20}\sqrt{h^2+HN^2}=\frac{\sqrt{30}}{40}\sqrt{h^2+HP^2}$ (1).

Mặt khác $HM+HN+HP=\frac{2S_{HBC}}{BC}+\frac{2S_{HCA}}{CA}+\frac{2S_{HAB}}{AB}=2\left(S_{HBC}+S_{HCA}+S_{HAB}\right)=2S=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2).

Kết hợp $(1),(2)$ suy ra $h=\frac{\sqrt{3}}{12}$ và $V=\frac{1}{3}.S.h=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{48}$.

Câu 50: Chọn D

Diện tích đáy $S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin 30^\circ=\frac{1}{4}$.

Chiều cao khối lăng trụ xác định bởi: $\cos a=\frac{\sqrt{d^2-\frac{h^2}{\sin^2\alpha}}.\sqrt{d^2-\frac{h^2}{\sin^2\beta}}-h^2.\cot\alpha.\cot\beta}{d^2-h^2}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{1-2h^2}.\sqrt{1-\frac{4}{3}h^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}h^2}{1-h^2}\Leftrightarrow h=\sqrt{\frac{3}{31}}$. Vậy $V=S.h=\frac{\sqrt{93}}{124}$.

Câu 51: Chọn A

Diện tích đáy $S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin 30^\circ=\frac{35}{4}$.

Chiều cao khối chóp xác định bởi: $\cos a = \dfrac{\sqrt{d^2 - \dfrac{h^2}{\sin^2\alpha}}.\sqrt{d^2 - \dfrac{h^2}{\sin^2\beta}} - h^2.\cot\alpha.\cot\beta}{d^2 - h^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{9-2h^2}.\sqrt{9-4h^2} - \sqrt{3}h^2}{9-h^2} \Leftrightarrow h = \dfrac{3}{\sqrt{29}}$. Vậy $V = \dfrac{1}{3}.S.h = \dfrac{35\sqrt{29}}{116}$.

Câu 52: Chọn A.

Diện tích đáy $S = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Chiều cao khối chóp xác định bởi: $\cos a = \dfrac{\sqrt{d^2 - \dfrac{h^2}{\sin^2\alpha}}.\sqrt{d^2 - \dfrac{h^2}{\sin^2\beta}} - h^2.\cot\alpha.\cot\beta}{d^2 - h^2}$

$\Leftrightarrow 0 = \dfrac{\sqrt{1-2h^2}.\sqrt{1-\dfrac{4}{3}h^2} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}h^2}{1-h^2} \Leftrightarrow h = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$. Vậy $V = \dfrac{1}{3}.S.h = \dfrac{1}{2}$.

Câu 53: Chọn D

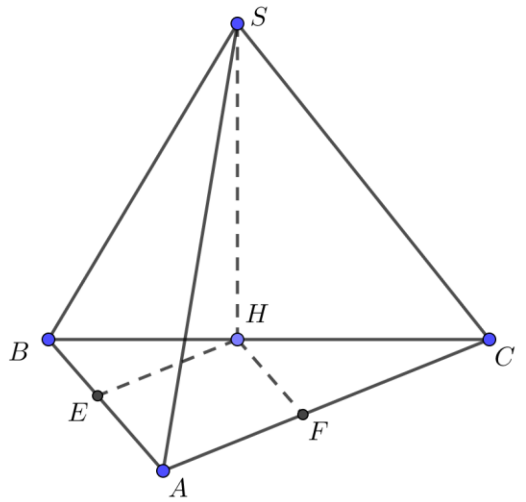
Có $V = \dfrac{2S^2}{3(a.\cot\alpha + b.\cot\beta + c.\cot\gamma)} = \dfrac{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3\left(2.\cot 30^0 + \sqrt{3}.\cot 45^0 + 1.\cot 60^0\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{20}$

Câu 54: Chọn A

Có $V = \dfrac{2S^2}{3(a.\cot\alpha + b.\cot\beta + c.\cot\gamma)} = \dfrac{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3\left(2.\cot\alpha + \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \cot\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

Câu 55: Chọn B



Kẻ $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$, kẻ $HE \perp AB, HF \perp AC$

Ta có: $SEH = SFH = 60^0$ và $HE = SH.\cot 60^0 = h.\cot 60^0$, $HF = SH.\cot 60^0 = h.\cot 60^0$

Diện tích đáy bằng $S=\frac{1}{2}AB.AC=a^2$

$\Rightarrow S=S_{HAB}+S_{HAC}=\frac{1}{2}\left(AB.HE+AC.HF\right)=\frac{1}{2}\left(a.h.\cot 60^0+2a.h.\cot 60^0\right)$

Vậy $h=\dfrac{2S}{\dfrac{a}{\sqrt{3}}+\dfrac{2a}{\sqrt{3}}}=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\Rightarrow V=\dfrac{S.h}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{9}$

Cách 2.

Có $V=\dfrac{2S^2}{3\left(a.\cot\alpha+b.\cot\beta+c.\cot\gamma\right)}=\dfrac{2a^4}{3\left(a\sqrt{5}.0+2.a.\dfrac{1}{\sqrt{3}}+a.\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{9}$

Câu 56: Chọn A

Có $V=\dfrac{2S^2}{3\left(a.\cot\alpha+b.\cot\beta+c.\cot\gamma+d.\cot\delta\right)}=\dfrac{2\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3\left(a.0+a.\sqrt{3}+a.1+a.\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\dfrac{\left(4\sqrt{3}-3\right)a^3}{26}$

Câu 57: Chọn A

Khối tứ diện vuông $AMNP$ có $V_{AMNP}=\frac{1}{6}.AM.AN.AP$

Theo quy tắc hình hộp, có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC'}=\dfrac{AB}{AM}.\overrightarrow{AM}+\dfrac{AD}{AN}.\overrightarrow{AN}+\dfrac{AA'}{AP}\overrightarrow{AP}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AC'}=\dfrac{1}{AM}\overrightarrow{AM}+\dfrac{2}{AN}\overrightarrow{AN}+\dfrac{3}{AP}\overrightarrow{AP}$

Vì bốn điểm M,N,P,C' đồng phẳng nên $\dfrac{1}{AM}+\dfrac{2}{AN}+\dfrac{3}{AP}=1$

Vì vậy theo bất đẳng thức $AM-GM$, ta có:

$1=\dfrac{1}{AM}+\dfrac{2}{AN}+\dfrac{3}{AP}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{AM}.\dfrac{1}{AN}.\dfrac{1}{AP}}\Rightarrow AM.AN.AP\geq 6.27\Rightarrow V_{AMNP}\geq 27$

Câu 58: Chọn C

Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{6}AD.BC.d\left(AD,BC\right).\sin\left(AD,BC\right)=\frac{1}{6}.AD.BC.AB.\sin 60^0=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}AD$

Ta đi tính độ dài đoạn thẳng AD dựa trên giả thiết $CD\perp AD$, $\left(AD,BC\right)=60^0$, $AB\perp AD, AB\perp BC$

Có: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

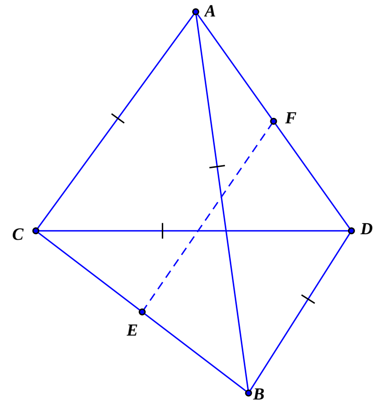
$=\dfrac{AD^2+AC^2-CD^2}{2}-\dfrac{AD^2+AB^2-BD^2}{2}=\dfrac{AC^2+BD^2-CD^2-AB^2}{2}$

$=\dfrac{\left(AB^2+BC^2\right)+\left(AB^2+AD^2\right)-\left(AC^2-AD^2\right)-AB^2}{2}=\dfrac{AB^2+2AD^2+BC^2-AC^2}{2}=AD^2$

Và $\left|\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}\right|=\left|AD.BC.\cos\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\right)\right|=\dfrac{a.AD}{2}$. Vậy $\dfrac{a.AD}{2}=AD^2\Leftrightarrow AD=\dfrac{a}{2}$

Do đó: $V_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Câu 59: Chọn B



Gọi E,F lần lượt là trung điểm của cạnh BC,AD. Ta có

$$\begin{cases}BC\perp AE\\BC\perp DE\end{cases}\Rightarrow BC\perp(ADE)\Rightarrow\begin{cases}BC\perp EF\\BC\perp AD\end{cases}.$$

$\Delta ABC=\Delta DBC\Rightarrow AE=DE\Rightarrow EF\perp AD\Rightarrow EF=d(AD,BC)$.

Vậy

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AD.BC.d(AD,BC).\sin(AD,BC)=\frac{1}{6}AD.BC.FE.$$

Ta có

$$FE=\sqrt{AE^2-\frac{AD^2}{4}}=\sqrt{\left(AB^2-\frac{BC^2}{4}\right)-\frac{AD^2}{4}}=\sqrt{1-\frac{BC^2}{4}-\frac{AD^2}{4}}.$$

Vậy $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}AD.BC.\sqrt{1-\dfrac{BC^2}{4}-\dfrac{AD^2}{4}}=\dfrac{1}{12}\sqrt{AD^2.BC^2.\left(4-AD^2-BC^2\right)}$

$$\le\frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{AD^2+BC^2+4-AD^2-BC^2}{3}\right)^3}=\frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AD^2=BC^2=4-AD^2-BC^2\Leftrightarrow AD=BC=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow FE=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

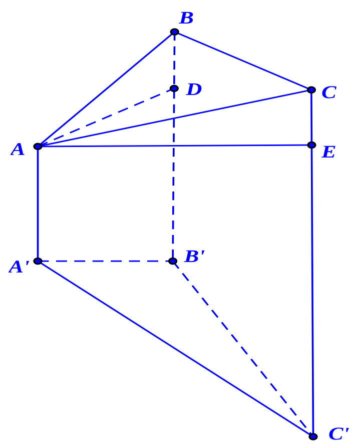
Câu 60: Chọn C

Ta có $d(O,(ABC))=\dfrac{3V_{OABC}}{S_{ABC}}=3.\dfrac{2}{3}=2$.

Vậy $\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{d^2(O,(ABC))}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}\ge3\sqrt[3]{\dfrac{1}{OA^2}.\dfrac{1}{OB^2}.\dfrac{1}{OC^2}}$.

Suy ra $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}OA.OB.OC\ge\dfrac{\sqrt{12^3}}{6}=4\sqrt{3}$.

Câu 61: Chọn D

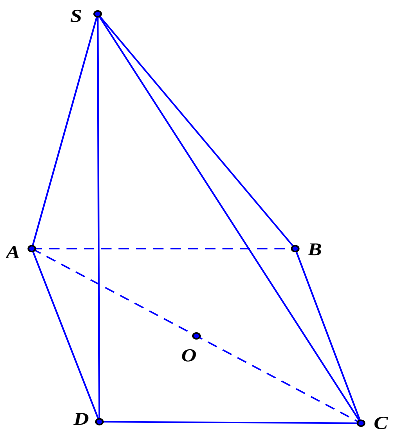


Hạ $AD\perp BB'$ và $AE\perp CC'$ suy ra $(ADE)\perp AA'//BB'//CC'$ và $AD=1,AE=\sqrt{3},DE=2$.

Ta có $S_{ADE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=S_{ADE}.\dfrac{AA'+BB'+CC'}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1+2+3}{3}=\sqrt{3}$.

Câu 62: Chọn A

Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC). Ta có



$\begin{cases}BA\perp SA\\ BA\perp SD\end{cases}\Rightarrow BA\perp(SAD)\Rightarrow BA\perp AD$ và $\begin{cases}BC\perp CS\\ BC\perp SD\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SCD)\Rightarrow BC\perp CD$.

Vậy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.SD=\dfrac{1}{6}.BA.BC.SD=\dfrac{\sqrt{2}a^2}{6}SD$.

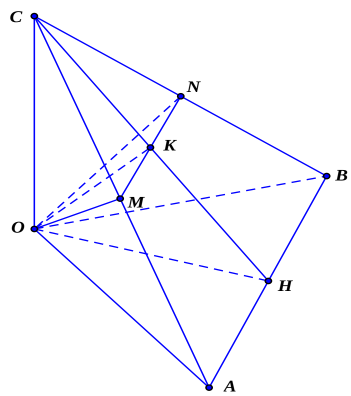
Đặt $SD=x$ ta có $d(B,(SAC))=d(D,(SAC))$ và tứ diện $DSAC$ vuông tại D nên

$$\frac{1}{d^2(D,(SAC))}=\frac{1}{DC^2}+\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DS^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{x^2}\Rightarrow d(D,(SAC))=\frac{\sqrt{2}xa}{\sqrt{3x^2+2a^2}}$$ và

$$\sin(SB,(SAC))=\frac{d(B,(SAC))}{SB}=\frac{d(D,(SAC))}{SB}=\frac{\dfrac{\sqrt{2}xa}{\sqrt{3x^2+2a^2}}}{\sqrt{x^2+3a^2}}=\frac{\sqrt{11}}{11}\Leftrightarrow x=\sqrt{3}a\ (x>a).$$

Do đó $V=\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

Câu 63: Chọn A



Kẻ $OH\perp AB, OK\perp CH$ suy ra

$OK\perp(ABC)\Rightarrow(ABC)\perp(OMN)\Rightarrow OK\subset(OMN)\Rightarrow K\in MN$.

Ta có $\begin{cases} OA = OB = \sqrt{2} \\ OC = OH = 1 \end{cases} \Rightarrow H, K$ lần lượt là trung điểm của AB, CH.

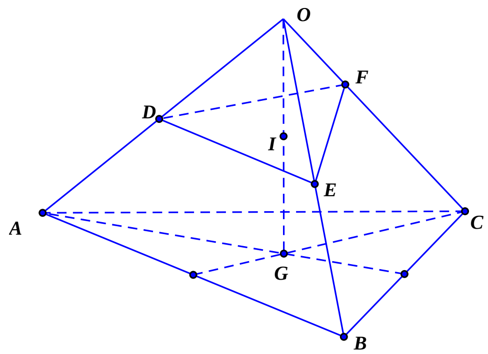
Ta có $2\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{CK} = \dfrac{CA}{CM}\overrightarrow{CM} + \dfrac{CB}{CN}\overrightarrow{CN}$.

Do M, K, N thẳng hàng nên $\dfrac{CA}{CM} + \dfrac{CB}{CN} = 4$.

Vậy $4 = \dfrac{CA}{CM} + \dfrac{CB}{CN} \geq 2\sqrt{\dfrac{CA}{CM}.\dfrac{CB}{CN}} \Leftrightarrow \dfrac{CA}{CM}.\dfrac{CB}{CN} \leq 4 \Leftrightarrow \dfrac{CM}{CA}.\dfrac{CN}{CB} \geq \dfrac{1}{4}$.

Vì vậy $\dfrac{V_{OAMNB}}{V_{OABC}} = \dfrac{S_{AMNB}}{S_{ABC}} = 1 - \dfrac{S_{CMN}}{S_{CAB}} = 1 - \dfrac{CM}{CA}.\dfrac{CN}{CB} \leq \dfrac{3}{4} \Rightarrow V_{OAMNB} \leq \dfrac{3}{4}V_{OABC} = \dfrac{1}{4}$.

Câu 64: Chọn A



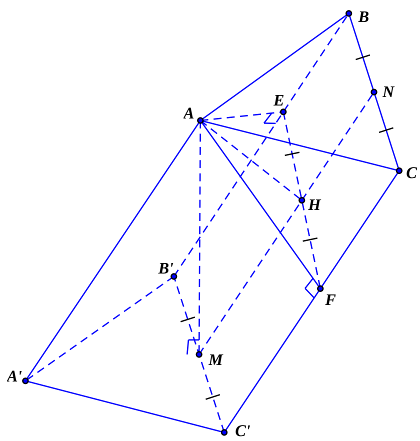
Ta có $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{OI} = \dfrac{OA}{OD}\overrightarrow{OD} + \dfrac{OB}{OE}\overrightarrow{OE} + \dfrac{OC}{OF}\overrightarrow{OF}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{OD}\overrightarrow{OD} + \dfrac{2}{OE}\overrightarrow{OE} + \dfrac{3}{OF}\overrightarrow{OF}$.

Do D, E, F, I đồng phẳng nên ta có $\dfrac{1}{OD} + \dfrac{2}{OE} + \dfrac{3}{OF} = 6$.

Vậy $6 = \dfrac{1}{OD} + \dfrac{2}{OE} + \dfrac{3}{OF} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{OD}.\dfrac{2}{OE}.\dfrac{3}{OF}} \Rightarrow OD.OE.OF \leq \dfrac{4}{3} \Rightarrow V_{ODEF} \leq \dfrac{2}{9}$.

Câu 65: Chọn D



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB', CC'.

Ta có $AE = 1, AF = 2$ và $AA'//BB'//CC'$ nên

$AE \perp AA', AF \perp AA' \Rightarrow (EFA) \perp AA' \Rightarrow EF \perp AA'$. Do đó $FE = d(C, BB') = \sqrt{5}$.

Gọi N là trung điểm của BC, $H = FE \cap MN \Rightarrow AH \perp MN$ $(MN // AA')$.

Ta có H là trung điểm của FE và $AE^2 + AF^2 = EF^2 = 5$ nên $AH = \frac{FE}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác vuông AMN có $AN = A'M$ và :

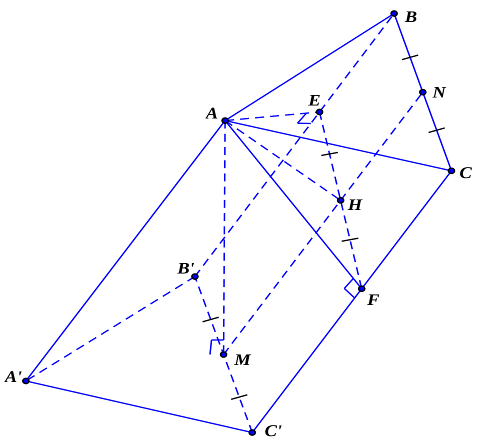
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow AM = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow AA' = \sqrt{5 + \frac{15}{9}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

Mặt khác do $\begin{cases} AM \perp (A'B'C') \\ AA' \perp (AEF) \end{cases} \Rightarrow \left((A'B'C'),(AEF)\right) = (AM, AA') = MAA' = 60^0$.

Tam giác AEF là hình chiếu vuông góc của tam giác $A'B'C'$ lên mặt phẳng (AEF). Vì vậy theo định lý hình chiếu ta có:

$$S_{A'B'C'} = \frac{S_{AEF}}{\cos MAA'} = \frac{\frac{1}{2}.1.2}{\frac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{2\sqrt{15}}{3}}} = 2 \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{A'B'C'}.AM = 2.\frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

Câu 66: Chọn A



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB', CC'.

Ta có $AE = 1, AF = 2$ và $AA' // BB' // CC'$ nên $AE \perp AA', AF \perp AA' \Rightarrow (EFA) \perp AA'$.

Do đó $EAF = \left((ABB'A'),(ACC'A')\right) = 90^0 \Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2}AE.AF = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

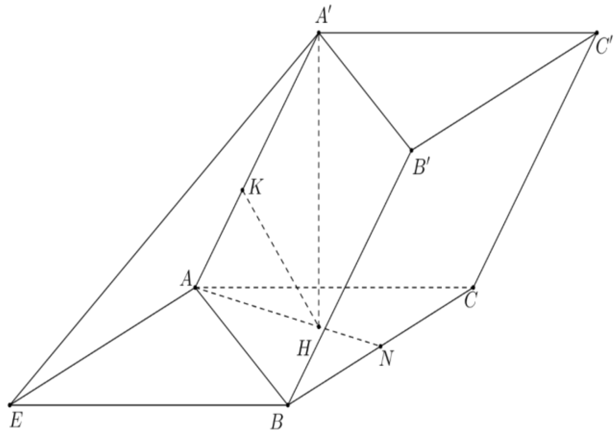
Gọi N là trung điểm của BC, $H = FE \cap MN \Rightarrow AH \perp MN$ $(MN // AA')$.

Ta có H là trung điểm của FE và $AH = \frac{EF}{2} = \frac{\sqrt{AE^2 + AF^2}}{2} = 1$.

Tam giác vuông AMN có $AN = A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ và

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow AM = 2 \Rightarrow AA' = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$ Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{AEF}.AA' = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{4\sqrt{3}}{3} = 2$.

Câu 67: Chọn C



Gọi H là hình chiếu của A' lên $(ABC) \Rightarrow H$ là trọng tâm tam giác ABC.

N là trung điểm BC, dựng hình bình hành $ACBE$.

Ta có $d(AA';BC) = d(BC;(A'AE)) = d(N;(A'AE)) = \frac{3}{2}d(H;(A'AE)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

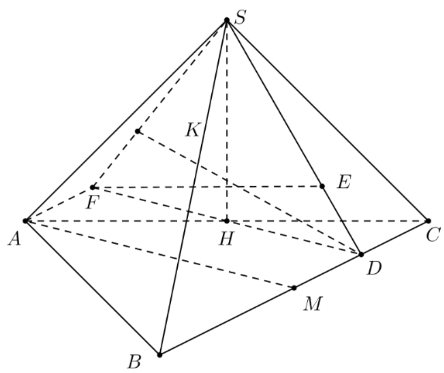
$\Rightarrow d(H;(A'AE)) = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Kẻ $HK \perp A'A$, khi đó ta chứng minh được $HK \perp (A'AE)$ nên $d(H;A'AE) = HK$.

Xét $\Delta A'AH$ có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HA'^2} \Rightarrow A'H = \frac{a}{3}$.

Do đó $V_{A'.BB'C'C} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}.A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{2}{3}.\frac{a}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

Câu 68: Chọn B



Gọi M là trung điểm BC, D là hình chiếu của S lên BC. Dựng hình chữ nhật $AMDF$.

Khi đó ta có $\begin{cases} DF \perp BC \\ SD \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SDF)$.

Từ D, F lần lượt kẻ $DK \perp SF$ $(K \in SF)$, $FE \perp SD$ $(E \in SD)$.

Ta cso $BC \perp (SDF) \Rightarrow BC \perp EF$. Mặt khác $EF \perp SD \Rightarrow d(A;(SBC)) = d(E;(SBC)) = EF$.

Tương tự, ta có $d(SA;BC) = d(D;(SAF)) = DK$ do $\begin{cases} AF \perp (SDF) \\ DK \perp SF \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DK \perp SF \\ DK \perp AF \end{cases}$.

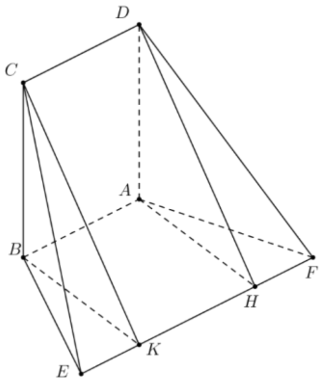
Theo giả thiết, ta có $EF = DK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. Do đó ΔSDF cân tại S.

Khi đó hình chiếu của S lên (ABC) là trung điểm H của DF hay ttrung điểm AC.

Xét hai tam giác đồng dạng ΔSDF và ΔFDE có $\dfrac{SH}{EF}=\dfrac{DH}{DE}=\dfrac{\frac{1}{2}AM}{\sqrt{DF^2-EF^2}}\Rightarrow SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3}{8}$.

Câu 69: Chọn A



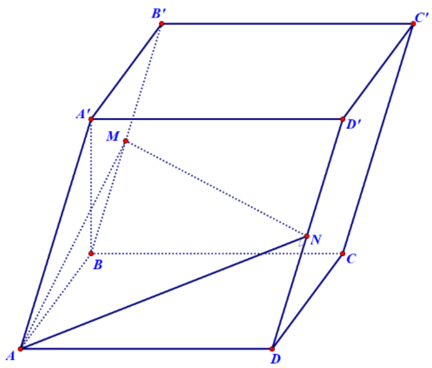
Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A, B lên EF.

Khi đó $FH=EK=a\Rightarrow AH=BK=a$.

Ta có $V_{ABCDEF}=V_{D.AHF}+V_{C.CEK}+V_{DAH.CAK}=\dfrac{1}{3}.DA.S_{\Delta AFH}+\dfrac{1}{3}BC.S_{\Delta CEK}+AB.S_{\Delta BCK}$

$=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.\dfrac{1}{2}.a.a+\dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.\dfrac{1}{2}.a.a+a.\dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{2}=\dfrac{5a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 70: Chọn C



Hạ $AM\perp BB'$ và $AN\perp DD'$ $\Rightarrow (AMN)\perp AA'$

Do đó $V_{ABCD.A'B'C'D'}=2V_{ABD.A'B'D'}=2S_{AMN}.AA'$

Vì $\begin{cases}(BB'C'C)//(ADD'A')\\(C'CDD')//(ABB'A')\end{cases}\Rightarrow\left[(ABB'A'),(ADD'A')\right]=\left[(BB'C'C),(C'CDD')\right]=60^\circ$.

Khi đó $MAN=60^\circ$ hoặc $MAN=120^\circ$ $\Rightarrow S_{AMN}=\dfrac{1}{2}AM.AN.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}.1.1.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Hình bình hành $ABB'A'$ có $S_{ABB'A'}=AM.BB'=A'B.AB\Leftrightarrow 1.AA'=\dfrac{AA'}{\sqrt{2}}.\dfrac{AA'}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow AA'=2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\sqrt{3}$.

DẠNG 7 Tỷ số thể tích

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc. Các điểm M,N,P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC,CD,BD. Cho biết $AB=4a, AC=6a, AD=7a$. Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

A. $V=7a^3$. **B.** $V=28a^3$. **C.** $V=14a^3$. **D.** $V=21a^3$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V. Gọi M là trung điểm của SB. P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP=2DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt cạnh SC tại N. Tính thể tích của khối đa diện $ABCDMNP$ theo V

A. $V_{ABCDMNP}=\frac{23}{30}V$. **B.** $V_{ABCDMNP}=\frac{19}{30}V$. **C.** $V_{ABCDMNP}=\frac{2}{5}V$. **D.** $V_{ABCDMNP}=\frac{7}{30}V$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $BAD=60^{\circ}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm của SC. Mặt phẳng (MND) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích là V_1, khối còn lại có thể tích là V_2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{12}{7}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}$.

Câu 4: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC và song song với BC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E. Mặt phẳng $(A'DE)$ chia khối lăng trụ thành hai phần, tính tỉ số thể tích của chúng.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{4}{23}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{4}{27}$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V. Xét điểm P thuộc cạnh AB, điểm Q thuộc cạnh BC và điểm R thuộc cạnh BD sao cho $\frac{PA}{PB}=2$, $\frac{QB}{BC}=3$, $\frac{RB}{RD}=4$. Tính thể tích của khối tứ diện $BPQR$.

A. $\frac{V}{5}$. **B.** $\frac{V}{4}$. **C.** $\frac{V}{3}$. **D.** $\frac{V}{6}$.

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'}=\frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k=\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị nhỏ nhất của k là?

A. $\frac{1}{60}$. **B.** $\frac{1}{30}$. **C.** $\frac{4}{15}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{16}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Điểm I thuộc đoạn SA. Biết mặt phẳng (MNI) chia khối chọp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $k=\frac{IA}{IS}$?

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 8: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Các điểm A', C' thỏa mãn $\overrightarrow{SA'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'}=\frac{1}{5}\overrightarrow{SC}$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D' và đặt $k=\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị lớn nhất của k là?

A. $\frac{4}{105}$. **B.** $\frac{1}{30}$. **C.** $\frac{4}{15}$. **D.** $\frac{4}{27}$.

Câu 9: Cho tứ diện đều có chiều cao h, ở ba góc của tứ diện người ta cắt đi các tứ diện bằng nhau có chiều cao x để khối đa diện còn lại có thể tích bằng một nửa thể tích của khối đa diện đều ban đầu. Tìm x.

A. $x=\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** $x=\frac{h}{\sqrt[3]{3}}$. **C.** $x=\frac{h}{\sqrt[4]{4}}$. **D.** $x=\frac{h}{\sqrt[3]{6}}$.

Câu 10: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ .Trên các cạnh AA',BB' lần lượt lấy các điểm E,F sao cho $AA'=kA'E,BB'=kB'F$. Mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối trụ đã cho thành hai khối đa diện bao gồm khối chóp $(C'.A'B'FE)$ có thể tích V_1 và khối đa diện (ABCEFC′) có thể tích V_2. Biết rằng $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{7}$, tìm k

A. $k=4$. **B.** $k=3$. **C.** $k=1$. **D.** $k=2$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, tâm O. Hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn thẳng AO. Biết mặt phẳng (SCD) tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. **C.** $\frac{3}{4}a^3$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$.

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $BAD=60°$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là $45°$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm SC. Mặt phẳng (MND) chia khối chóp thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện có đỉnh S có thể tích là V_1, khối đa diện còn lại có thể tích V_2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{12}{7}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng $48cm^3$. Gọi M,N,P theo thứ tự là trung điểm các cạnh CC',BC và $B'C'$. Tính thể tích của khối chóp $A'.MNP$.

A. $8cm^3$. **B.** $12cm^3$. **C.** $24cm^3$. **D.** $\frac{16}{3}cm^3$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là ΔABC vuông cân ở B, $AC=a\sqrt{2}$, $SA\perp(ABC)$, $SA=a$. Gọi G là trọng tâm của ΔSBC, $mp(\alpha)$ đi qua AG và song song với BC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V là thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S. Tính V.

A. $\frac{5a^3}{54}$. **B.** $\frac{2a^3}{9}$. **C.** $\frac{4a^3}{27}$. **D.** $\frac{4a^3}{9}$.

Câu 15: Cho tứ diện đều có chiều cao h, ở bốn góc của tứ diện người ta cắt đi các tứ diện đều bằng nhau có chiều cao x để khối đa diện còn lại có thể tích bằng $\frac{3}{4}$ thể tích của khối đa diện ban đầu. Tìm x.

A. $x=\frac{h}{\sqrt[3]{4}}$. **B.** $x=\frac{h}{\sqrt[3]{16}}$. **C.** $x=\frac{h}{\sqrt[3]{12}}$. **D.** $x=\frac{h}{\sqrt[3]{6}}$.

Câu 16: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Lấy điểm E thuộc cạnh BB' sao cho $BE=\frac{BB'}{4}$, điểm F thuộc cạnh DD' sao cho $DF=\frac{3DD'}{4}$. Mặt phẳng qua ba điểm A,E,F chia khối hộp thành hai phần. Tính tỉ số hai phần ấy.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 17: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N lần lượt thuộc các cạnh bên AA',CC' sao cho $MA=MA';NC=4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Hỏi trong bốn khối tứ diện $GA'B'C',BB'MN,ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

A. Khối $ABB'C'$. **B.** Khối $A'BCN$. **C.** Khối $BB'MN$. **D.** Khối $GA'B'C'$.

Câu 18: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Biết C' là trung điểm SC. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích hai khối chóp $S.AB'C'D'$ và $S.ABCD$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$.

Câu 19: Cho hình chóp đều $S.ABC$, có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB,SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính thể tích V của khối chóp $A.BCNM$.

A. $V=\frac{\sqrt{5}a^3}{32}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{16}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{48}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{5}a^3}{96}$.

Câu 20: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Gọi M là trung điểm của SA, lấy điểm N trên cạnh SB sao cho $\frac{SN}{SB}=\frac{2}{3}$. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SC chia khối chóp thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A, V_2 là thể tích của khối đa diện còn lại. TÍnh tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{16}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{18}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{11}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{9}$.

Câu 21: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=4a;AD=6a;AA'=7a$. Các điểm M,N,P thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AP}=4\overrightarrow{AA'}$. Tính thể tích V của khối tứ diện $AMNP$.

A. $V=168a^3$. **B.** $V=672a^3$. **C.** $V=336a^3$. **D.** $V=1008a^3$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) chứa AC' cắt các cạnh SB,SD lần lượt tại B',D'. Đặt $m=\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$.Giá trị nhỏ nhất của m bằng

A. $\frac{2}{27}$. **B.** $\frac{4}{27}$. **C.** $\frac{1}{9}$. **D.** $\frac{2}{9}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm cạnh SC. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AC' cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D'. Đặt $m=\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị lớn nhất của m bằng

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Câu 24: Cho khối tứ diện đều $ABCD$. Gọi M,N,P,Q,R,S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,AC,AD,BC,CD,DB. Biết thể tích của khối bát diện đều $MQNPSR$ bằng $9\sqrt{2}\text{ cm}^3$. Tính độ dài cạnh của tứ diện đều $ABCD$.

A. 2 cm . **B.** 3 cm . **C.** 6 cm . **D.** $\sqrt[3]{2}$ cm .

Câu 25: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh $AB, AC: \frac{AM}{BM}=\frac{1}{2},\frac{AN}{CN}=2$. Mặt phẳng (α) chứa MN, song song với AD chia khối tứ diện thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V

A. $V=\frac{4\sqrt{2}a^3}{108}$. **B.** $V=\frac{5\sqrt{2}a^3}{108}$. **C.** $V=\frac{4\sqrt{2}a^3}{81}$. **D.** $V=\frac{11\sqrt{2}a^3}{342}$

Câu 26: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và E là điểm thuộc tia đối của tia DB sao cho $\frac{BE}{BD}=k$. Tìm k để mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh B có thể tích $V=\frac{11\sqrt{2}a^3}{294}$

A. $k=\frac{6}{5}$. **B.** $k=6$. **C.** $k=4$. **D.** $k=5$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Trên cạnh SA lấy các điểm M,N sao cho $SM=MN=NA$. Hai mặt phẳng (α), (β) song song với $(ABCD)$ và lần lượt đi qua M,N chia khối chóp đã cho thành ba phần. Nếu phần trên có thể tích bằng $10\ \text{dm}^3$ thì phần ở giữa có thể tích là

A. $70\ \text{dm}^3$. **B.** $80\ \text{dm}^3$. **C.** $180\ \text{dm}^3$. **D.** $190\ \text{dm}^3$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh SA,SD. Mặt phẳng (α) chứa MN và cắt các tia SB,SC lần lượt tại P và Q. Đặt $\frac{SP}{SB}=x$, V_1 là thể tích của khối chóp $S.MNQP$ và V là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tìm x để $V=2V_1$.

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $x=\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$. **C.** $x=\frac{-1+\sqrt{41}}{4}$. **D.** $x=\sqrt{2}$.

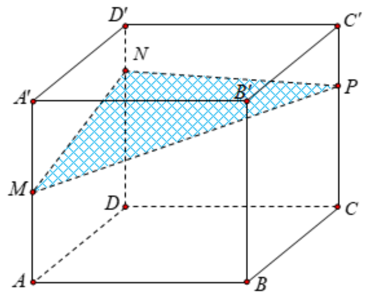
Câu 30: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N,P,Q là các điểm lần lượt thuộc các cạnh $AA',BB',CC',B'C'$ thỏa mãn $\frac{AM}{AA'}=\frac{1}{2},\frac{BN}{BB'}=\frac{1}{3},\frac{CP}{CC'}=\frac{1}{4},\frac{C'Q}{B'C'}=\frac{1}{5}$. Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $MNPQ$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{11}{30}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{11}{45}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{19}{45}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{22}{45}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Điểm K thuộc đoạn SA. Biết mặt phẳng (MNK) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, phần chứa đỉnh S có thể tích bằng $\frac{7}{13}$ lần phần còn lại. Tính tỉ số $t=\frac{KA}{KS}$.

A. $t=\frac{1}{2}$. **B.** $t=\frac{3}{4}$. **C.** $t=\frac{1}{3}$. **D.** $t=\frac{2}{3}$.

Câu 32: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 2110. Biết $A'M=MA$, $DN=3ND'$, $CP=2C'P$ như hình vẽ. Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp đã cho thành hai khối đa diện. Thể tích khối đa diện nhỏ hơn bằng



A. $\frac{5275}{6}$. **B.** $\frac{5275}{12}$. **C.** $\frac{7385}{18}$. **D.** $\frac{8440}{9}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$, $SA = SB = SC = SD = \sqrt{2}a$. Giả sử E thuộc cạnh SC sao cho $SE = 2EC$, F là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SF = \frac{1}{3}FD$. Thể tích khối đa diện $SABEF$ bằng:

A. $\frac{5\sqrt{3}a^3}{36}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{18}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}a^3}{9}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}a^3}{27}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu của M, N, P, Q trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 35: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với hai đáy là AB và CD, $AB = 2CD$. Gọi E là một điểm trên cạnh SC. Mặt phẳng (ABE) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau. Tính tỉ số $\frac{SE}{SC}$.

A. $\frac{\sqrt{10}-2}{2}$. **B.** $\sqrt{6}-2$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $\frac{\sqrt{26}-4}{2}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$. Một mặt phẳng song song với đáy (ABC) cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P. Gọi M', N', P' lần lượt là hình chiếu của M, N, P trên mặt phẳng đáy. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNP.M'N'P'$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABC$. Một mặt phẳng (P) song song với đáy (ABC) cắt các cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P. Tìm tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để (P) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau.

A. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại D lấy điểm S' thỏa mãn $S'D = \frac{1}{2}SA$ và S', S ở cùng phía đối với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{7}{9}$. **C.** $\frac{7}{18}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a, một mặt phẳng (P) song song với mặt đáy (ABC) cắt các cạnh bên SA,SB,SC lần lượt tại M,N,P. Tính diện tích tam giác MNP biết mặt phẳng (P) chia khối chóp đã cho thành hai khối đa diện có diện tích bằng nhau.

A. $S_{MNP}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **B.** $S_{MNP}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$. **C.** $S_{MNP}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[3]{2}}$. **D.** $S_{MNP}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[4]{4}}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên đường thẳng qua D và song song với SA lấy điểm S' thỏa mãn $\overrightarrow{S'D}=k\overrightarrow{SA}$ với $k>0$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABCD$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{2k^2+k}{2(k+1)^2}$. **B.** $\dfrac{3k+2}{2(k+1)^2}$. **C.** $\dfrac{3k^2+2k}{2(k+1)^2}$. **D.** $\dfrac{k}{k+1}$.

Câu 41: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, biết góc tạo bởi SG và (SBC) bằng $30°$. Mặt phẳng chứa BC và vuông góc với SA chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích V_1, V_2 trong đó V_1 là phần thể tích chứa điểm S. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. 6. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{6}{7}$. **D.** 7.

Câu 42: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên tạo với đường cao một góc 30^0, O là trọng tâm tam giác ABC. Một hình chóp tam giác đều thứ hai $O.A'B'C'$ có S là tâm của tam giác $A'B'C'$ và cạnh bên của hình chóp $O.A'B'C'$ tạo với đường cao một góc 60^0 sao cho mỗi cạnh bên SA, SB, SC lần lượt cắt các cạnh bên OA', OB', OC'. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$. Gọi V_2 là thể tích khối chóp $S.ABC$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{9}{16}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{27}{64}$. **D.** $\dfrac{9}{64}$.

Câu 43: Một viên đá có dạng khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Người ta cưa viên đá theo mặt phẳng song song với mặt đáy của khối chóp để chia viên đá thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính diện tích thiết diện viên đá bị cưa bởi mặt phẳng nói trên.

A. $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{4}}$. **B.** $\dfrac{a^2}{\sqrt[3]{2}}$. **C.** $\dfrac{a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{a^2}{2\sqrt[3]{2}}$.

Câu 44: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm tam giác BCD. Tính thể tích của khối chóp $A.GBC$.

A. $V=3$. **B.** $V=4$. **C.** $V=6$. **D.** $V=5$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AC=a\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) góc $60°$ và $AC'=4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $V=\dfrac{8}{3}$. **B.** $V=\dfrac{16}{3}$. **C.** $V=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

Câu 46: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi V_1 là phần thể tích chung của hai khối của hai khối tứ diện $A'BC'D$ và $AB'CD'$. Gọi V_2 là thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 47: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$, trên các cạnh AA', BB' lấy các điểm M, N sao cho $AA'=3A'M$, $BB'=3B'N$. Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $C'.A'B'NM$, V_2 là thể tích của khối đa diện $ABCMNC'$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{4}{7}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{7}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{7}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{3}{7}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,SC. Mặt phẳng (BMN) cắt SD tại P. Tỉ số $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$ bằng:

A. $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{16}$. **B.** $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{12}$. **D.** $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{8}$.

Câu 49: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 54, gọi M,N,P lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ADB. Tính thể tích của khối tứ diện $AMNP$.

A. $V=\dfrac{27}{2}$. **B.** $V=4$. **C.** $V=9$. **D.** $V=16$.

Câu 50: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 6 và góc nhọn bằng $45°$, cạnh bên của hình hộp bằng 10 và tạo với mặt phẳng đáy một góc $45°$. Tính thể tích khối đa diện $ABCDD'B'$.

A. $V=180$. **B.** $V=60$. **C.** $V=90$. **D.** $V=120$.

Câu 51: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh bên AA', CC' sao cho $MA=MA'$, $NC=4NC'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Hỏi trong bốn khối tứ diện $GA'B'C'$, $BB'MN$, $ABB'C'$ và $A'BCN$, khối tứ diện nào có thể tích nhỏ nhất?

A. Khối $A'BCN$. **B.** Khối $GA'B'C'$. **C.** Khối $ABB'C'$. **D.** Khối $BB'MN$.

Câu 52: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 60. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh bên AA', BB', CC' sao cho $MA=2MA'$, $NB=3NB'$, $PC=4PC'$. Tính thể tích khối đa diện $BCMNP$.

A. 40. **B.** 30. **C.** 31. **D.** $\dfrac{85}{3}$.

Câu 53: Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E đối xứng với điểm B qua D. Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

A. $V=\dfrac{13\sqrt{2}a^3}{216}$. **B.** $V=\dfrac{7\sqrt{2}a^3}{216}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{18}$. **D.** $V=\dfrac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích bằng 48. Kí hiệu M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, CD sao cho $MA = MB$, $ND = 2NC$. Tính thể tích V của khối chóp $S.MBCN$.

A. $V = 40$. **B.** $V = 8$. **C.** $V = 20$. **D.** $V = 28$.

Câu 55: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B', AC$ và P là điểm thuộc cạnh CC' sao cho $CP = 2C'P$. Tính thể tích khối tứ diện $BMNP$ theo V.

A. $\frac{2V}{9}$. **B.** $\frac{V}{3}$. **C.** $\frac{5V}{24}$. **D.** $\frac{4V}{9}$.

Câu 56: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD, ABC và E là điểm đối xứng với B qua D. Mặt (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

A. $V = \frac{9\sqrt{2}a^3}{320}$. **B.** $V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{320}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{96}$. **D.** $V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{80}$.

Câu 57: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V. Các điểm M, N, P trên các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\frac{AM}{AA'} = x$, $\frac{BN}{BB'} = y$, $\frac{CP}{CC'} = z$. Biết thể tích của khối đa diện $ABC.MNP$ bằng $\frac{1}{2}V$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x + y + z = 1$. **B.** $x + y + z = 2$. **C.** $x + y + z = \frac{3}{2}$. **D.** $x + y + z = \frac{2}{3}$.

Câu 58: Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 1, OB = 2, OC = 3$. Gọi D, E, F lần lươt là chân đường cao hạ từ đỉnh O xuống các cạnh BC, CA, AB. Thể tích khối tứ diện $ODEF$ bằng

A. $\frac{36}{325}$. **B.** $\frac{276}{325}$. **C.** $\frac{289}{325}$. **D.** $\frac{49}{325}$.

Câu 59: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Điểm P trên cạnh CD sao cho $PD = 2CP$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Tính thể tích khối đa diện $BMNPQD$.

A. $\frac{\sqrt{2}}{16}$. **B.** $\frac{23\sqrt{2}}{432}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{48}$. **D.** $\frac{13\sqrt{2}}{432}$.

Câu 60: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng 1. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Điểm P trên cạnh CD sao cho $PC = 2PD$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Thể tích khối đa diện $BMNPQD$ bằng

A. $\frac{11\sqrt{2}}{216}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{27}$. **C.** $\frac{5\sqrt{2}}{108}$. **D.** $\frac{7\sqrt{2}}{216}$.

Câu 61: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AA' và BB'. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 62: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tính thể tích V của khối đa diện chứa đỉnh S.

A. $V=\dfrac{15\sqrt{2}a^3}{144}$. **B.** $V=\dfrac{7\sqrt{2}a^3}{72}$. **C.** $V=\dfrac{11\sqrt{2}a^3}{144}$. **D.** $V=\dfrac{7\sqrt{2}a^3}{144}$.

Câu 63: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đường cao bằng 8 và đáy là hình vuông cạnh bằng 6. Gọi M,N,P,Q lần lượt là tâm của các mặt $ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các điểm $A,B,C,D,M,N,P,Q,$ bằng

A. 108. **B.** 168. **C.** 96. **D.** 120.

Câu 64: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm đối xứng với C qua B. N là trung điểm SC. Mặt phẳng (MND) chia hình chóp thành hai khối đa diện. Gọi V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh S và V_2 là thể tích khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$?

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{5}{3}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{12}{7}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{5}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{5}$.

Câu 65: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 2. Gọi M,N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AA' và BB' sao cho M là trung điểm của AA' và $B'N=\dfrac{2}{3}BB'$. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $A'C'$ tại P và đướng thẳng CN cắt đường thẳng $B'C'$ tại Q. Thể tích khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. $\dfrac{13}{18}$. **B.** $\dfrac{23}{9}$. **C.** $\dfrac{7}{18}$. **D.** $\dfrac{5}{9}$.

Câu 66: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc với $A'C$ chia lăng trụ thành hai khối. Biết thể tích của hai khối là V_1 và V_2 với $V_1<V_2$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{11}$. **B.** $\dfrac{1}{23}$. **C.** $\dfrac{1}{47}$. **D.** $\dfrac{1}{7}$.

Câu 67: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và M,N là hai điểm lần lượt trên cạnh CA,CB sao cho MN song song với AB và $\dfrac{CM}{CA}=k$. Mặt phẳng $(MNB'A')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai phần có thể tích V_1 và V_2 sao cho $\dfrac{V_1}{V_2}=2$. Khi đó giá trị của k là

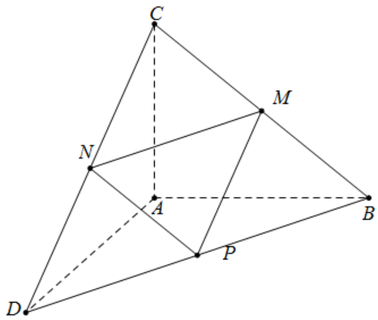
A. $k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $k=\dfrac{1}{2}$. **C.** $k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.D	4.B	5.A	6.A	7.D	8.A	9.D	10.B
11.B	12.D	13.B	14.A	15.C	16.B	17.B	18.D	19.A	20.C
21.B	22.C	23.B	24.C	25.A	26.C	27.A	28.B	29.B	30.B
31.D	32.A	33.A	34.B	35.A	36.B	37.A	38.C	39.D	40.C
41.B	42.A	43.D	44.B	45.B	46.B	47.B	48.B	49.B	50.D
51.A	52.C	53.D	54.C	55.A	56.A	57.C	58.A	59.B	60.D
61.D	62.B	63.D	64.D	65.D	66.C	67.A			

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

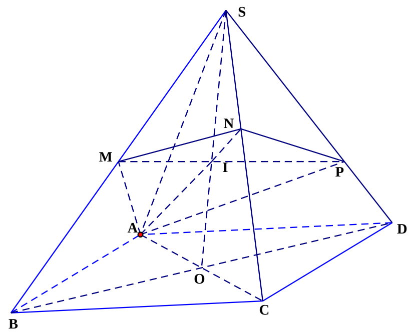
Câu 1: Chọn A



Ta có $V_{A.MNP}=\frac{1}{3}\cdot S_{MNP}\cdot d\left(A,(MNP)\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot S_{BCD}\cdot d\left(A,(MNP)\right)=\frac{1}{4}V_{ABCD}$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot AB\cdot AC\cdot AD=7a^3$.

Câu 2: Chọn A



Gọi $O=AC\cap BD$, $I=MP\cap SO$, $N=AI\cap SC$ Khi đó

$V_{ABCDMNP}=V_{S.ABCD}-V_{S.AMNP}$

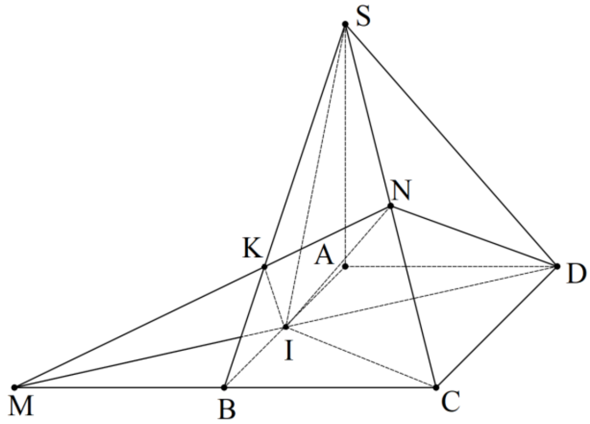
Đặt $a=\frac{SA}{SA}=1, b=\frac{SB}{SM}=2, c=\frac{SC}{SN}, d=\frac{SD}{SP}=\frac{3}{2}$ ta có

$a+c=b+d\Rightarrow c=\frac{5}{2}$.

$\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{a+b+c+d}{4abcd}=\frac{1+2+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{4.1.2.\frac{5}{2}.\frac{3}{2}}=\frac{7}{30}\Rightarrow V_{ABCDMNP}=V_{S.ABCD}-V_{S.AMNP}=V-\frac{7}{30}V=\frac{23}{30}V$.

Câu 3: **Chọn D**

Trong tam giác SMC, SB và MN là hai trung tuyến cắt nhau tại trọng tâm $K \Rightarrow \dfrac{SK}{SB}=\dfrac{2}{3}$.



BI là đường trung bình của tam giác $MCD \Rightarrow I$ là trung điểm AB.

$V_1 = V_{S.AID}+V_{S.IKN}+V_{S.IND}$

Đặt: $V_{S.ABCD}=V$. $V_{S.AID}=\dfrac{1}{4}.V$;

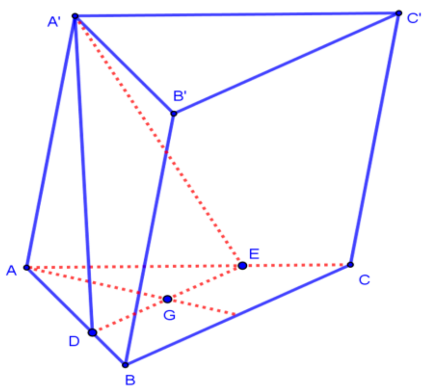
$$V_{S.IKN}=\frac{SK}{SB}.\frac{SN}{SC}.V_{S.IBC}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}V=\frac{1}{12}V;$$

$$V_{S.IND}=\frac{SN}{SC}.V_{S.ICD}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}V=\frac{1}{4}.V$$

$$\Rightarrow V_1=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right).V=\frac{7}{12}.V\Rightarrow V_2=\frac{5}{12}.V\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}.$$

Câu 4: **Chọn B**

Ta có $\begin{cases}\dfrac{V_{A'.ADE}}{V_{A'.ABC}}=\dfrac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=\dfrac{AD}{AB}.\dfrac{AE}{AC}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\\ V_{A'.ABC}=\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}\end{cases}$



$$\Rightarrow V_{A'.ADE}=\frac{4}{27}V_{ABC.A'B'C'}$$

Do đó $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{4}{27}}{1-\frac{4}{27}}=\dfrac{4}{23}$.

Câu 5: **Chọn A**

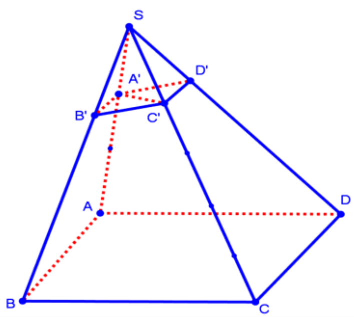
Ta có $\dfrac{V_{B.PQR}}{V_{B.ACD}}=\dfrac{BP}{BA}\dfrac{BQ}{BC}\dfrac{BR}{BD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{4}{5}\Rightarrow V_{B.PQR}=\dfrac{1}{5}V$.

Câu 6: **Chọn A**

Đặt $\dfrac{SB}{SB'}=x$, $\dfrac{SD}{SD'}=y$. Ta có $\dfrac{SB}{SB'}+\dfrac{SD}{SD'}=\dfrac{SA}{SA'}+\dfrac{SC}{SC'}\Rightarrow x+y=8$.

Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{1}{15x}\Rightarrow V_{S.A'B'C'}=\dfrac{1}{15x}V_{S.ABC}=\dfrac{1}{30x}V_{S.ABCD}$.

Ta có $\dfrac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}}=\dfrac{1}{15y}\Rightarrow V_{S.A'D'C'}=\dfrac{1}{15y}V_{S.ADC}=\dfrac{1}{30y}V_{S.ABCD}$.



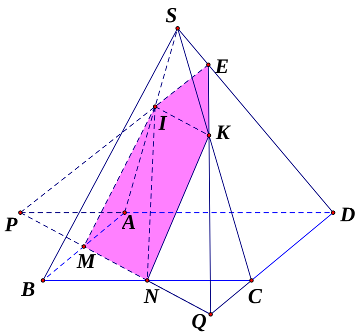
Ta có $k=\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{1}{30}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

Ta có $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\ge 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{1}{2}\Rightarrow k\ge\dfrac{1}{60}$.

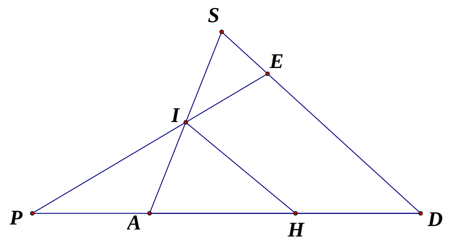
Vậy giá trị nhỏ nhất của k là $\frac{1}{60}$ khi $x = y = 4$.

Lại có: $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{V_{S.ABC}}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

Câu 7: Chọn C



Hình 1



Hình 2

Mặt phẳng (MNI) cắt khối chóp theo thiết diện như hình 1. Đặt $V_{S.ABCD} = V$.

Ta có $S_{\Delta APM} = S_{\Delta BMN} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{8}S_{ABCD} \Rightarrow \frac{S_{\Delta APM}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{8}$.

Mặt khác: $\frac{d(I,(ABCD))}{d(S,(ABCD))} = \frac{IA}{SA} = \frac{k}{k+1}$.

$\Rightarrow \frac{V_{I.APM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{\Delta APM}}{S_{ABCD}}.\frac{d(I,(ABCD))}{d(S,(ABCD))} = \frac{k}{8(k+1)} \Rightarrow V_{I.APM} = \frac{k}{8(k+1)}V$.

Do $MN//AC \Rightarrow IK//AC \Rightarrow IK//(ABCD) \Rightarrow d(I;(ABCD)) = d(K;(ABCD))$.

Mà $S_{\Delta APM} = S_{\Delta NCQ}. \Rightarrow V_{I.APM} = V_{K.NCQ} = \frac{k}{8(k+1)}V$.

Kẻ $IH//SD$ ($H \in SD$) như hình 2. Ta có : $\frac{IH}{SD} = \frac{AH}{AD} = \frac{AI}{AS} = \frac{k}{k+1}$.

$\frac{IH}{ED} = \frac{PH}{PD} = \frac{PA}{PD} + \frac{AH}{PD} = \frac{PA}{PD} + \frac{2AH}{3AD} = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3(k+1)} = \frac{3k+1}{3(k+1)}$.

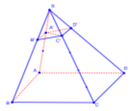
$\Rightarrow \frac{ED}{SD} = \frac{IH}{SD} : \frac{ID}{ED} = \frac{3k}{3k+1} \Rightarrow \frac{d(E,(ABCD))}{d(S,(ABCD))} = \frac{ED}{SD} = \frac{3k}{3k+1}$.

$\frac{S_{\Delta PQD}}{S_{ABCD}} = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{V_{E.PQD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{27k}{24k+8} \Rightarrow V_{E.PQD} = \frac{27k}{24k+8}V$.

$V_{EIKAMNCD} = \frac{13}{20}V \Leftrightarrow V_{E.PDC} - V_{I.APM} - V_{K.NQC} = \frac{13}{20}V$

$\Leftrightarrow \frac{27k}{8(3k+1)}V - \frac{k}{8(k+1)}V - \frac{k}{8(k+1)}V = \frac{13}{20}V \Leftrightarrow \frac{27k}{2(3k+1)} - \frac{k}{k+1} = \frac{13}{5} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$.

Câu 8: Chọn A



Đặt $\frac{SB}{SB'} = x$, $\frac{SD}{SD'} = y$

Ta có $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} \Rightarrow x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x$.

Ta có $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{15x} \Rightarrow V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{15x}V_{S.ABC} = \frac{1}{30x}V_{S.ABCD}$.

Ta có $\frac{V_{S.A'D'C'}}{V_{S.ADC}} = \frac{1}{15y} \Rightarrow V_{S.A'D'C'} = \frac{1}{15y}V_{S.ADC} = \frac{1}{30y}V_{S.ABCD}$.

Ta có $k = \frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{30}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{4}{15xy} = \frac{4}{15x(8-x)} = \frac{4}{15(-x^2+8x)}$.

Ta có $1 \le x, y < 8 \Rightarrow 8 - x \ge 1 \Leftrightarrow x \le 7$.

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + 8x$ trên đoạn $[1;7]$.

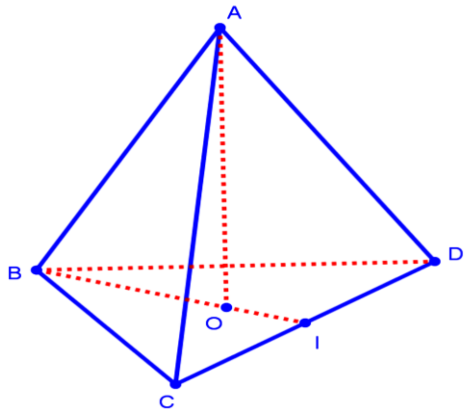
$f'(x) = -2x + 8$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin [1;7] \\ x = 4 \in [1;7] \end{array}\right.$

Tính $f(1) = 7$; $f(7) = 7$; $f(4) = 32$.

k đạt giá trị lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$\min f(x) = 7 \Rightarrow k_{\max} = \frac{4}{15.7} = \frac{4}{105}$.

Câu 9: Chọn D



Gọi cạnh của khối tứ diện đều ban đầu là a.

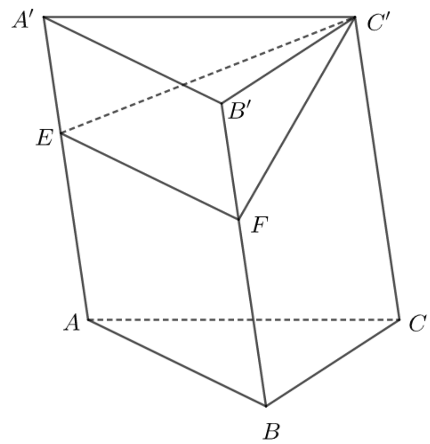
Ta có $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow a = \frac{3h}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}h}{2}$; $V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{h^3\sqrt{3}}{8}$.

Thể tích của ba khối tứ diện đều có chiều cao x được cắt ra là $V = 3.\frac{x^3\sqrt{3}}{8} = \frac{x^3 3\sqrt{3}}{8}$.

Ta có $\frac{x^3 3\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{2}\frac{h^3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow x^3 = \frac{h^3}{6} \Leftrightarrow x = \frac{h}{\sqrt[3]{6}}$.

Câu 10: Chọn B



+) Do khối chóp $C'.A'B'FE$ và khối chóp $C'.A'B'BA$ có chung đường cao hạ từ C' nên

$$\frac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{C'.A'B'BA}}=\frac{S_{A'B'FE}}{S_{A'B'BA}}=\frac{2S_{A'B'E}}{2S_{A'B'A}}=\frac{A'E}{A'A}=\frac{1}{k}$$

+) Do khối chóp $C'.ABC$ và khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chung đường cao hạ từ C' và đáy là ΔABC nên $\dfrac{V_{C'.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{V_{C'.A'B'BA}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\dfrac{2}{3}$

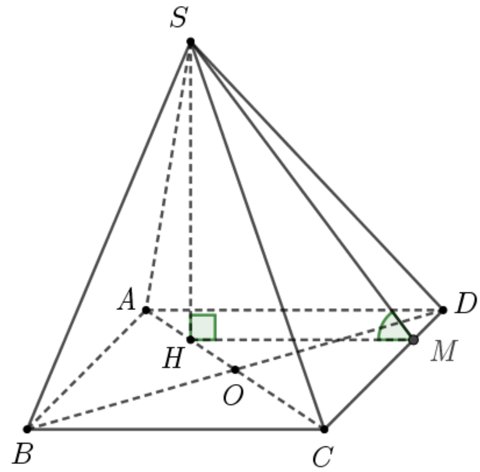
Từ và suy ra

$$\frac{V_{C'.A'B'FE}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{2}{3k}\Rightarrow\frac{V_1}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{2}{3k}\Rightarrow V_1=\frac{2}{3k}.V_{ABC.A'B'C'}$$

+) Đặt $V=V_{ABC.A'B'C'}$ Khi đó $\begin{cases}V_1=\dfrac{2}{3k}.V\\ V_2=V-V_1=V-\dfrac{2}{3k}.V\end{cases}$

Mà $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{7}$ nên $\dfrac{2}{3k}.V=\dfrac{2}{7}(V-\dfrac{2}{3k}.V)\Leftrightarrow\dfrac{2}{3k}=\dfrac{2}{7}(1-\dfrac{2}{3k})\Leftrightarrow\dfrac{6}{7k}=\dfrac{2}{7}\Leftrightarrow 2k=6\Leftrightarrow k=3$

Câu 11: Chọn B



Dựng $HM\perp CD$ tại M.

Ta có $\begin{cases}CD\perp HM\\ CD\perp SH\end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(SHM\right)\Rightarrow CD\perp SM$.

Khi đó $\begin{cases}\left(SCD\right)\cap\left(ABCD\right)=CD\\ \left(SCD\right)\supset SM\perp CD\\ \left(ABCD\right)\supset HM\perp CD\end{cases}$ nên góc giữa $\left(SCD\right)$ và $\left(ABCD\right)$ là góc SMH.

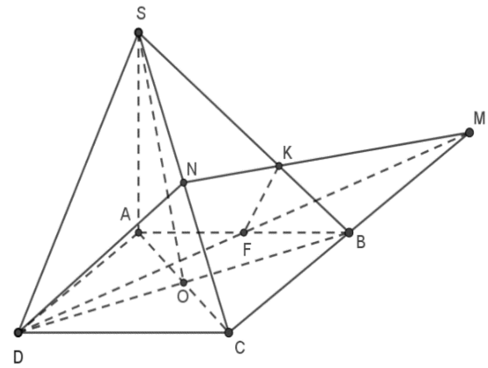
Theo giả thiết ta có $SMH=60^\circ$.

Mặt khác ta lại có ΔCMH đồng dạng với ΔCDA nên $\dfrac{HM}{AD}=\dfrac{CH}{CA}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow HM=\dfrac{3}{4}AD=\dfrac{3}{4}a$.

Xét ΔSMH vuông tại H ta có $SH=HM.\tan SMH=\dfrac{3a}{4}\tan 60^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a.a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3$.

Câu 12: Chọn D



Gọi $O=AC\cap BD;\ F=DM\cap AB;\ K=SB\cap MN$.

Ta có: $BAD=60^\circ$ nên tam giác ADB là tam giác đều.

K là trọng tâm ΔSCM $\Rightarrow \dfrac{MK}{MN}=\dfrac{2}{3}$.

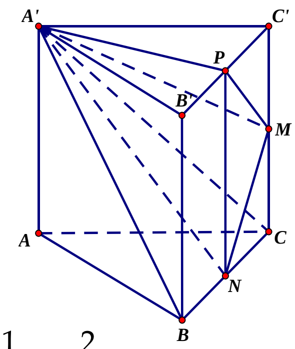
Xét:

$$\frac{V_{M.KFB}}{V_{M.NDC}}=\frac{MK}{MN}.\frac{MF}{MD}.\frac{MB}{MC}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\Rightarrow V_{M.KFB}=\frac{1}{6}.V_{M.NDC}\Rightarrow V_{KFBNDC}=\frac{5}{6}V_{M.NDC}.$$

Mà: $V_{M.NDC}=2V_{B.NDC}$ và $2V_{N.BCD}=2.\dfrac{1}{2}V_{S.BCD}$, vì $d\left(N,\left(BDC\right)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(S,\left(BDC\right)\right)=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$

$$\Rightarrow V_2=V_{KFBNDC}=\frac{5}{6}V_{M.NDC}=\frac{5}{12}V_{S.ABCD}\Rightarrow V_1=V_{SADFKN}=V_{S.ABCD}-V_1=\frac{7}{12}V_{S.ABCD}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{5}.$$

Câu 13: Chọn B



Gọi V là thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

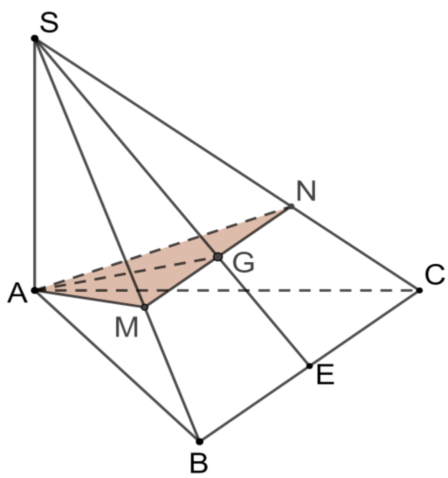
Ta có:

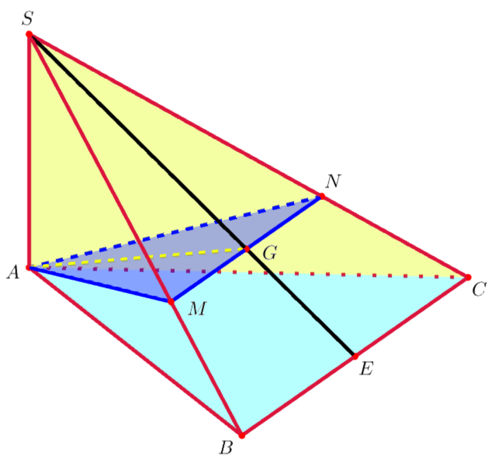
$$\begin{cases} S_{\Delta MNP}=\dfrac{1}{4}S_{BCC'B'} \\ d\left(A',(MNP)\right)=d\left((A'),(BCC'B')\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow V_{A'MNP}=\dfrac{1}{4}V_{A'BCC'B'}$ Mặt khác: $V_{A'BCC'B'}=V-V_{A'ABC}=V-\dfrac{1}{3}V=\dfrac{2}{3}V$

$\Rightarrow V_{A'MNP}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}V=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 48=8cm^3$.

Câu 14: Chọn A





Trong mặt phẳng $\left(SBC\right)$, qua G kẻ đường thẳng song song với BC cắt SB,SC lần lượt tại M,N. Suy ra $BC//\left(MAN\right)$, $AG\subset\left(MAN\right)$. Vì vậy $\left(MAN\right)\equiv\left(\alpha\right)$.

Ta có tam giác ABC vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}\Rightarrow AB=BC=a$.

$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}.AB.BC = \frac{a^3}{6}$.

Gọi E là trung điểm của BC. Ta có $MN//BC \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3}$.

Khi đó: $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{V}{V_{SABC}} = \frac{5}{9} \Rightarrow V = \frac{5}{9}V_{SABC} = \frac{5}{9}.\frac{a^3}{6} = \frac{5a^3}{54}$.

Cách tính khác:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Ta chứng minh được $AH \perp (SBC)$ và $BMNC$ là hình thang vuông tại B, M.

Khi đó $V_{ABMNC} = \frac{1}{3}.AH.\frac{1}{2}.BM.(MN+BC) = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{3}.\left(\frac{2a}{3}+a\right) = \frac{5a^3}{54}$.

Câu 15: Chọn C

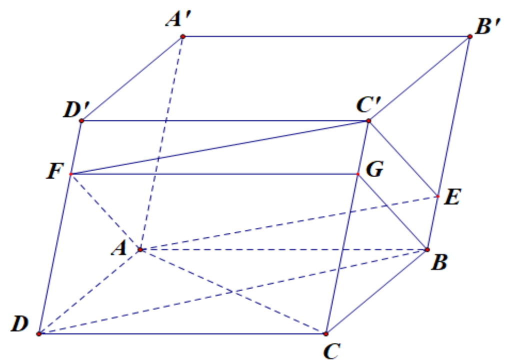
Gọi cạnh của khối tứ diện đều ban đầu là a, ta có $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a \Rightarrow a = \sqrt{\frac{3}{2}}h$.

Thể tích của khối tứ diện ban đầu là $V = \frac{1}{3}.\left(\sqrt{\frac{3}{2}}h\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}.h = \frac{h^3}{8}$.

Do đó tổng thể tích của ba khối tứ diện đều có chiều cao x được cắt ra là $\frac{3x^3}{8}$.

Theo giả thiết ta có $\frac{3x^3}{8} = \frac{1}{4}.\frac{h^3}{8} \Leftrightarrow x = \frac{h}{\sqrt[3]{12}}$.

Câu 16: Chọn B



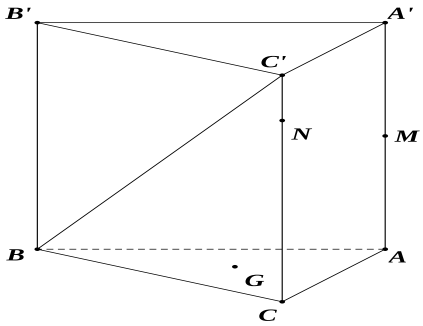
Ta thấy thiết diện của (AEF) và hình hộp là tứ giác $AFC'E$.

Ta có $V_{ABCD.AFC'E} = \frac{x+y+z+t}{4}V_{ABCD.A'B'C'D'}$

trong đó $x = \frac{0}{AA'} = 0; y = \frac{BE}{BB'} = \frac{1}{4}; z = \frac{CC'}{CC'} = 1; t = \frac{DF}{DD'} = \frac{3}{4} \Rightarrow V_{ABCD.AFC'E} = \frac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'}$.

Vậy tỉ lệ thể tích của hai khối là 1.

Câu 17: Chọn B



Ta có

$V_{GA'B'C'}=\frac{1}{3}V_{ABCA'B'C'}$

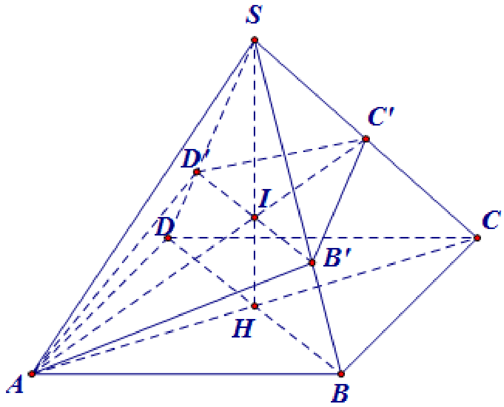
$V_{BB'MN}=V_{A'BB'N}=\frac{1}{2}V_{A'BCB'C'}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}V_{ABCA'B'C'}=\frac{1}{3}V_{ABCA'B'C'}$

$V_{ABB'C'}=\frac{1}{2}V_{ABCB'C'}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}V_{ABCA'B'C'}=\frac{1}{3}V_{ABCA'B'C'}$

$V_{A'BCN}=\frac{2}{5}V_{A'BCB'C'}=\frac{2}{5}.\frac{2}{3}V_{ABCA'B'C'}=\frac{4}{15}V_{ABCA'B'C'}$

Do đó thể tích của khối $A'BCN$ nhỏ nhất.

Câu 18: Chọn D



Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm H của hình vuông $ABCD$.

C' là trung điểm của SC và H là trung điểm AC nên $I=AC'\cap SH$ là trọng tâm ΔSAC

$\Rightarrow SI=\frac{2}{3}SH$

Ta có:

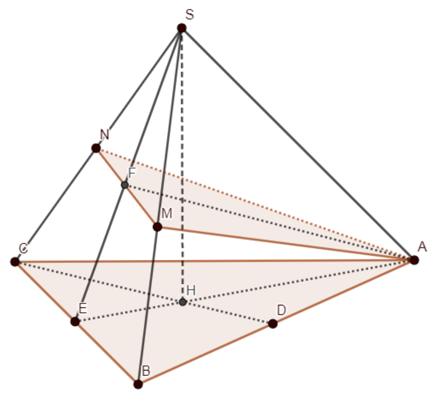
$BD\perp AC$, $BD\perp SH\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC\Rightarrow BD//(P)\Rightarrow BD//B'D'$

Mặt khác: $(P)\cap(SBD)=B'D'$, $I\in AC'\subset(P), I\in SH\subset(SBD)\Rightarrow I\in B'D'$

Do đó: $\frac{SB'}{SB}=\frac{SD'}{SD}=\frac{SI}{SH}=\frac{2}{3}$

Ta có: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}V_{S.AB'C'D'}}{\frac{1}{2}V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

Câu 19: Chọn A



Gọi E,F lần lượt là trung điểm của BC,MN. Gọi H là trọng tâm ΔABC.

Ta có: ΔSBC cân tại S $\Rightarrow SF\perp MN$.

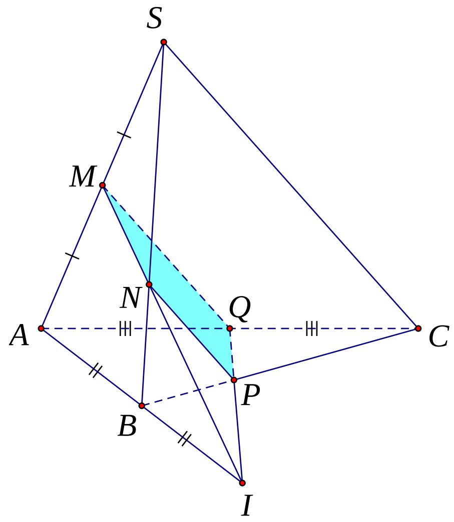
$$\begin{cases} SF\perp MN \\ MN=(SBC)\cap(AMN) \\ (SBC)\perp(AMN)\end{cases}\Rightarrow SF\perp(AMN).$$

Ta có: ΔASE có AF vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến $\Rightarrow\Delta ASE$ cân tại A.

$\Rightarrow SA=AE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\frac{a\sqrt{15}}{6}$, $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$V_{SAMN}=\frac{1}{4}V_{SABC}\Rightarrow V_{SAMNCB}=\frac{3}{4}V_{SABC}=\frac{3}{4}.\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{15}}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{5}}{32}$.

Câu 20: Chọn C



Kẻ $MQ//SC, NP//SC$ ta được $(MNPQ)$ chính là mặt phẳng (α).

Ba mặt phẳng $(\alpha),(SAB),(ABC)$ giao nhau theo ba giao tuyến MN, AB, PQ đồng quy tại I.

Xét trong tam giác SAB có $\frac{MS}{MA}.\frac{IA}{IB}.\frac{NB}{NS}=1 \Leftrightarrow 1.\frac{IA}{IB}.\frac{1}{2}=1$ nên B là trung điểm của IA.

Các tam giác SAI, IAC lần lượt có các trọng tâm là N, P.

Gọi thể tích khối chóp $IAMQ$ là V.

Ta có: $\frac{V_{IBNP}}{V_{IAMQ}}=\frac{IB}{IA}.\frac{IN}{IM}.\frac{IP}{IQ}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{2}{9} \Rightarrow \frac{V_1}{V}=\frac{7}{9} \Rightarrow V_1=\frac{7}{9}V \quad (1)$

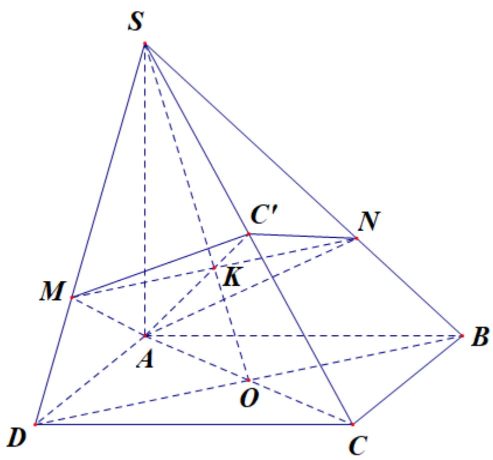
$\frac{V_{ABSC}}{V_{AIMQ}}=\frac{AB}{AI}.\frac{AS}{AM}.\frac{AC}{AQ}=\frac{1}{2}.2.2=2 \Rightarrow V_{S.ABC}=2V \Rightarrow V_1+V_2=2V \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $V_2=2V-\frac{7}{9}V=\frac{11}{9}V$. Từ đó suy ra $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{11}$.

Câu 21: Chọn D

Ta có tứ diện $AMNP$ vuông tại A nên $V=\frac{1}{6}AB.AD.AA'=\frac{1}{6}.8a.18a.28a=672a^3$.

Câu 22: Chọn C



Đặt $\frac{SA'}{SA}=1; x=\frac{SB'}{SB}; \frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2}; y=\frac{SD'}{SD}$. Ta có

$\frac{SA}{SA}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SD}{SD'}+\frac{SB}{SB'} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$

Có

$m=\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.B'C'D'}}{2V_{S.BCD}}=\frac{1}{2}\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}.\frac{SD'}{SD}=\frac{1}{4}xy$.

$3=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \Rightarrow xy \geq \frac{4}{9} \Rightarrow m \geq \frac{1}{9}$.

Câu 23: Chọn B

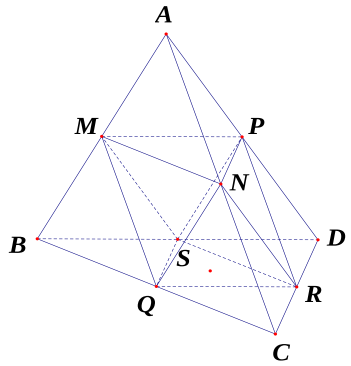
Đặt $x=\frac{SA'}{SA}=1$; $y=\frac{SB'}{SB}$; $z=\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2}$; $t=\frac{SD'}{SD}$. Ta có

$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{y}+\frac{1}{t} \Leftrightarrow 1+2=\frac{1}{y}+\frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{t}=3$.

Mà $m=\frac{V_{S.B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.B'C'D'}}{2V_{S.BCD}}=\frac{1}{2}\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}.\frac{SD'}{SD}=\frac{1}{4}yt$.

$\frac{1}{y}=3-\frac{1}{t}\Leftrightarrow y=\frac{t}{3t-1},\left(\frac{1}{3}<t\le 1\right)\Rightarrow m=f(t)=\frac{t^2}{4(3t-1)}\le \max_{\left(\frac{1}{3};1\right]} f(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$.

Câu 24: Chọn C



Gọi $V=V_{A.BCD}$

Ta có: $\frac{V_{A.MNP}}{V_{A.BCD}}=\frac{AM}{AB}.\frac{AN}{AC}.\frac{AP}{AD}=\frac{1}{8}\Rightarrow V_{A.MNP}=\frac{1}{8}V$

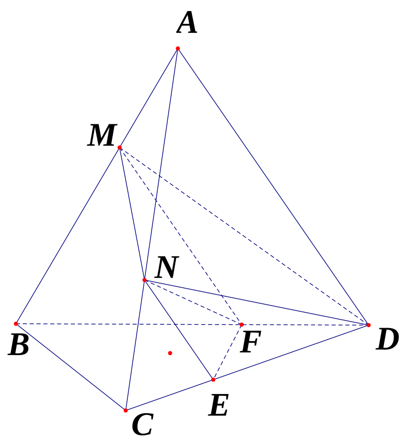
Tương tự $V_{B.MQS}=\frac{1}{8}V;V_{C.NQR}=\frac{1}{8}V;V_{D.PRS}=\frac{1}{8}V$

$V_{MQNPSR}=V-V_{A.MNP}-V_{B.MQS}-V_{C.NQR}-V_{D.PRS}=V-4.\frac{1}{8}V=\frac{V}{2}$

Theo giả thiết $V_{MQNPSR}=9\sqrt{2}\Leftrightarrow \frac{V}{2}=9\sqrt{2}\Leftrightarrow V=18\sqrt{2}$.

Đặt độ dài cạnh của tứ diện là a, ta có: $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=18\sqrt{2}\Leftrightarrow a=6$. Vậy $a=6$ cm.

Câu 25: Chọn A



Ta có $\begin{cases} N\in(\alpha)\cap(ACD) \\ AD//(\alpha)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(ACD)=NE//AD\left(E\in CD,\frac{DE}{DC}=\frac{AN}{AC}=\frac{2}{3}\right)$

$\begin{cases} M\in(\alpha)\cap(ABD) \\ AD//(\alpha)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(ABD)=MF//AD\left(F\in BD,\frac{DF}{DB}=\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}\right)$.

Như vậy thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (α) là tứ giác $MNEF$.

$\frac{V_{A.MND}}{V_{A.BCD}}=\frac{AM}{AB}\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\Rightarrow V_{A.MND}=\frac{2}{9}V_{A.BCD}$.

$\frac{V_{D.MNF}}{V_{D.MNB}}=\frac{DF}{DB}=\frac{1}{3};\frac{V_{D.MNB}}{V_{D.ABC}}=\frac{S_{MNB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}-S_{AMN}-S_{BCN}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}-\frac{2}{9}S_{ABC}-\frac{1}{3}S_{ABC}}{S_{ABC}}=\frac{4}{9}$

$\Rightarrow V_{D.MNF}=\frac{1}{3}.\frac{4}{9}V_{A.BCD}=\frac{4}{27}V_{A.BCD}$.

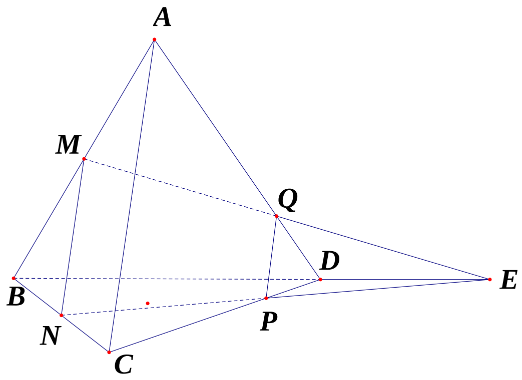
$\frac{V_{D.EFN}}{V_{D.CBN}}=\frac{DE}{DC}.\frac{DF}{DB}=\frac{2}{3}.\frac{1}{3}=\frac{2}{9};\frac{V_{D.CBN}}{V_{D.CBA}}=\frac{S_{CBN}}{S_{CBA}}=\frac{CN}{CA}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{D.EFN}=\frac{1}{3}.\frac{2}{9}V_{A.BCD}=\frac{2}{27}V_{A.BCD}$.

Cộng theo vế ta được:

$$V_{A.MND}+V_{D.MNF}+V_{D.EFN}=\frac{2}{9}V_{A.BCD}+\frac{4}{27}V_{A.BCD}+\frac{2}{27}V_{A.BCD}$$

$$\Leftrightarrow V=\frac{12}{27}V_{A.BCD}=\frac{12}{27}.\frac{a^3\sqrt{2}}{12}=\frac{a^3\sqrt{2}}{27}=\frac{4a^3\sqrt{2}}{108}.$$

Câu 26: Chọn C



Gọi $\begin{cases}P=EN\cap CD\\Q=EM\cap AD\end{cases}$ suy ra thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (MNE) là tứ giác $MNPQ$.

Ta có: $\frac{V_{E.DPQ}}{V_{E.BNM}}=\frac{ED}{EB}.\frac{EP}{EN}.\frac{EQ}{EM}$. Theo giả thiết: $\frac{BE}{BD}=k\Rightarrow\frac{ED}{EB}=\frac{k-1}{k}$;

Ta thấy: $\begin{cases}MN//AC\\(EMN)\cap(ACD)=PQ\end{cases}\Rightarrow PQ//MN//AC\Rightarrow\frac{EQ}{EM}=\frac{EP}{EN}$

Xét ΔEAB có EM là trung tuyến

$$\Rightarrow\frac{EB}{ED}+1=2\frac{EM}{EQ}\Rightarrow\frac{EM}{EQ}=\frac{\frac{k}{k-1}+1}{2}=\frac{2k-1}{2k-2}\Rightarrow\frac{EQ}{EM}=\frac{2k-2}{2k-1}$$

Thay vào: $\frac{V_{E.DPQ}}{V_{E.BNM}}=\frac{k-1}{k}.\left(\frac{2k-2}{2k-1}\right)^2\Rightarrow\frac{V}{V_{E.BNM}}=1-\frac{k-1}{k}.\left(\frac{2k-2}{2k-1}\right)^2=\frac{8k^2-11k+4}{k(2k-1)^2}$.

Lại có:

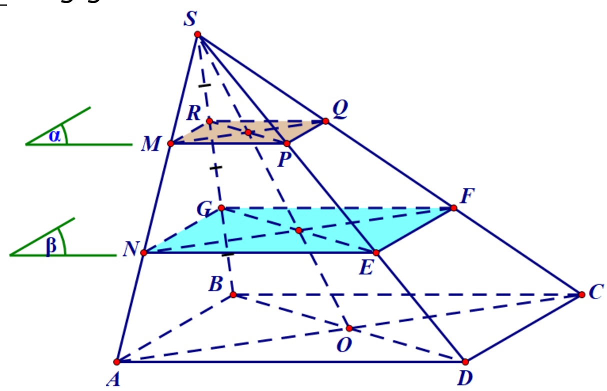
$$\frac{V_{E.BMN}}{V_{D.ABC}}=\frac{d(E,(BMN)).S_{BMN}}{d(D,(ABC)).S_{ABC}}=\frac{EB}{DB}.\frac{BM}{BA}.\frac{BN}{BC}=\frac{k}{4}$$

Từ và suy ra $\frac{V}{V_{A.BCD}}=\frac{8k^2-11k+4}{k(2k-1)^2}.\frac{k}{4}=\frac{8k^2-11k+4}{4(2k-1)^2}$

Như vậy $\frac{\frac{11\sqrt{2}a^3}{294}}{\frac{\sqrt{2}a^3}{12}}=\frac{8k^2-11k+4}{4(2k-1)^2}\Leftrightarrow\frac{22}{49}=\frac{8k^2-11k+4}{4(2k-1)^2}\Leftrightarrow 40k^2-187k+108=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=4\\k=\frac{27}{40}\end{array}\right.$

Vậy $k=4$.

Câu 28: Chọn A



Gọi $P=(\alpha)\cap SD,\ Q=(\alpha)\cap SC,\ R=(\alpha)\cap SB,\ E=(\beta)\cap SD,\ F=(\beta)\cap SC,\ G=(\beta)\cap SB$ thì theo đề ta có:

- $V_{S.MPQR}=10\text{ dm}^3$
- $V_{S.NEFG}=V_{S.NEF}+V_{S.NGF}$,

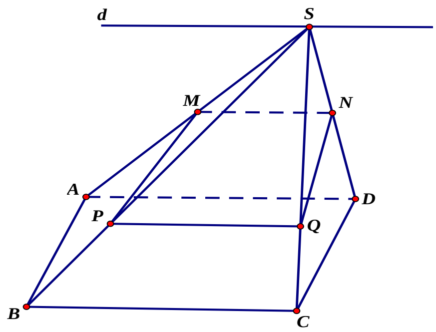
$\dfrac{V_{S.NEF}}{V_{S.MPQ}}=\dfrac{SN}{SM}.\dfrac{SE}{SP}.\dfrac{SF}{SQ}=2.2.2\Rightarrow V_{S.NEF}=8V_{S.MPQ}$,

$\dfrac{V_{S.NGF}}{V_{S.MRQ}}=\dfrac{SN}{SM}.\dfrac{SG}{SR}.\dfrac{SF}{SQ}=2.2.2\Rightarrow V_{S.NEF}=8V_{S.MRQ}$

$\Rightarrow V_{S.NEFG}=V_{S.NEF}+V_{S.NGF}=8V_{S.MPQ}+8V_{S.MRQ}=8\left(V_{S.MPQ}+V_{S.MRQ}\right)=8V_{S.MPQR}=80\text{ dm}^3$.

Vậy thể tích của khối chóp cụt $NEFG.MPQR$ là $V=V_{S.NEFG}-V_{S.MPQR}=80-10=70\text{ dm}^3$.

Câu 29: Chọn B



Ta chứng minh $PQ//BC$.

Giải sử $(SBC)\cap(SAD)=d$ khi đó ta có: $\begin{cases}(SBC)\cap(SAD)=d\\(SBC)\cap(ABCD)=BC\\(SAD)\cap(ABCD)=AD\\BC//AD\end{cases}\Rightarrow d//BC,\ d//AD.$

M,N lần lượt là trung điểm các cạnh SA,SD nên ta có $MN//AD,\ MN//d.$

Ta lại có: $\begin{cases}(SBC)\cap(SAD)=d\\(SBC)\cap(\alpha)=PQ\\(SAD)\cap(\alpha)=MN\\d//MN\end{cases}\Rightarrow PQ//MN\Rightarrow PQ//BC.$

Xét tam giác SBC có $PQ//BC,\ \dfrac{SP}{SB}=x\ \Rightarrow\dfrac{SQ}{SC}=\dfrac{SP}{SB}=x.$

$$\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.MNQP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.MNP}+V_{S.NQP}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.MNP}}{2V_{S.ABD}}+\frac{V_{S.NQP}}{2V_{S.DCB}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{SM.SN.SP}{SA.SB.SD}+\frac{1}{2}\cdot\frac{SN.SQ.SP}{SD.SC.SB}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x\cdot x=\frac{x+2x^2}{8}.$$

Theo bài ra: $V=2V_1\Rightarrow\frac{V_1}{V}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x+2x^2}{8}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2+x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1+\sqrt{33}}{4}\\x=\frac{-1-\sqrt{33}}{4}\end{array}\right.$

Mà $\frac{SP}{SB}=x\Rightarrow x>0\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$.

Cách 2:

Sử dụng công thức tính nhanh tỉ lệ thể tích của khối chóp tứ giác như sau:

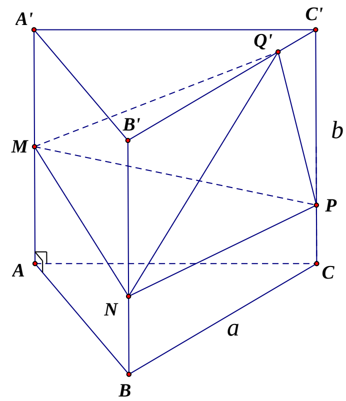
Cho chóp $S.ABCD$ và mặt phẳng (α) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD của khối chóp tại các điểm M,P,Q,N với $\frac{SQ}{SC}=\frac{SP}{SB}=x,\ \frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SD}=\frac{1}{2}$.

Thì ta có: $\frac{V_1}{V}=\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\frac{x.x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+2+2\right)=\frac{x+2x^2}{8}$.

Theo bài ra: $V=2V_1\Rightarrow\frac{V_1}{V}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x+2x^2}{8}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2+x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1+\sqrt{33}}{4}\\x=\frac{-1-\sqrt{33}}{4}\end{array}\right.$.

Mà $\frac{SP}{SB}=x\Rightarrow x>0\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$

Câu 30: Chọn B



Đặt $BC=a, CC'=b$

Diện tích tam giác NPQ' là:

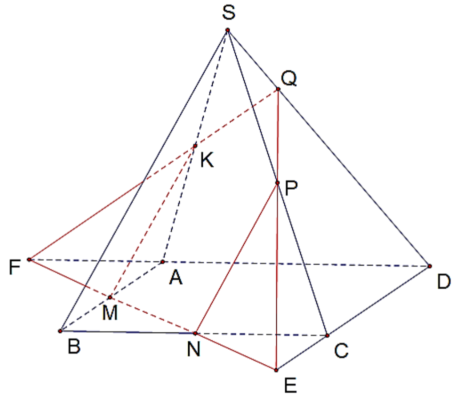
$$S_{NPQ'}=S_{BCC'B'}-\left(S_{NB'Q'}+S_{PC'Q'}+S_{BCPN}\right)=\frac{11ab}{30}$$

Suy ra: $\frac{V_{M.NPQ'}}{V_{A'.BCC'B'}}=\frac{11}{30}$. Tức là: $\frac{V_1}{V_{A'.BCC'B'}}=\frac{11}{30}$.

Mặt khác: $V_{A'.BCC'B'}+V_{A'.ABC}=V_{ABC.A'B'C'}\Leftrightarrow V_{A'.BCC'B'}+\frac{1}{3}V_2=V_2\Leftrightarrow V_{A'.BCC'B'}=\frac{2}{3}V_2$

Do đó: $\frac{V_1}{\frac{2}{3}V_2}=\frac{11}{30}\Leftrightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{11}{45}$.

Câu 31: Chọn D



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kéo dài MN cắt DA, DC lần lượt tại F, E.

Trong mặt phẳng (SAD), gọi $FK \cap SD = Q$. Trong mặt phẳng (SCD), gọi $QE \cap SC = P$.

Suy ra thiết diện là ngũ giác $MNPQK$ và $MN // AC // PK$.

Đặt $h = d\left(S,(ABCD)\right)$

$$\frac{KA}{KS} = t \Rightarrow \frac{KA}{SA} = \frac{t}{t+1} \Rightarrow d\left(K,(ABCD)\right) = d\left(P,(ABCD)\right) = \frac{t}{t+1}.h$$

Ta có: $FA = BN = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \frac{FD}{FA} = 3$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SAD, suy ra

$$\frac{QS}{QD}.\frac{FD}{FA}.\frac{KA}{KS} = 1 \Leftrightarrow \frac{QS}{QD}.3.t = 1 \Rightarrow \frac{QS}{QD} = \frac{1}{3t} \Rightarrow \frac{QD}{SD} = \frac{3t}{3t+1} \Rightarrow d\left(Q,(ABCD)\right) = \frac{3t}{3t+1}h$$

Mặt khác: $S_{FAM} = S_{NCE} = S_{BMN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{8}S_{ABCD} \Rightarrow S_{DEF} = \frac{9}{8}S_{ABCD}$

Suy ra thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S là

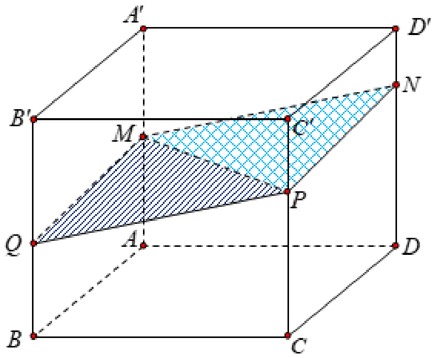
$$V = V_{QDEF} - V_{KAMF} - V_{PECN} = \frac{1}{3}\left(\frac{3t}{3t+1}h.\frac{9}{8}S - \frac{t}{t+1}.\frac{1}{8}S - \frac{t}{t+1}.\frac{1}{8}S\right)$$

$$= \frac{1}{3}.\left(\frac{27t}{8(3t+1)} - \frac{2t}{8(t+1)}\right).h.S_{ABCD} \Rightarrow V = \left(\frac{27t}{8(3t+1)} - \frac{2t}{8(t+1)}\right)V_{ABCD}$$

Phần thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S bằng $\frac{7}{13}$ phần còn lại suy ra thể tích của khối đa diện không chứa đỉnh S bằng $\frac{13}{20}$ thể tích khối chóp $S.ABCD$

$$\Rightarrow \frac{27t}{8(3t+1)} - \frac{2t}{8(t+1)} = \frac{13}{20} \Rightarrow t = \frac{2}{3}.$$

Câu 32: Chọn A



Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với BB'.

Giả sử $\frac{A'M}{AA'}=x$, $\frac{C'P}{CC'}=y$, $\frac{D'N}{DD'}=z$, $\frac{B'Q}{BB'}=t$. Khi đó $x+y=z+t$.

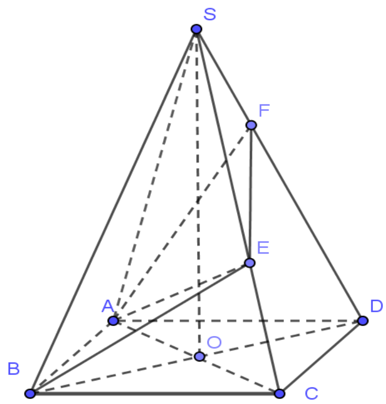
$\frac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'D'.ABD}}=\frac{x+z+t}{3} \Rightarrow \frac{V_{A'B'D'.MQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}}=\frac{x+z+t}{6}$.

$\frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{C'B'D'.CBD}}=\frac{y+z+t}{3} \Rightarrow \frac{V_{C'B'D'.PQN}}{V_{A'B'C'D'.ABCD}}=\frac{y+z+t}{6}$.

$a_{n+1}=-2a_n$.

$\frac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}}=\frac{1}{2}\left(\frac{A'M}{AA'}+\frac{C'P}{CC'}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12} \Rightarrow V_{MNPQ.A'D'C'B'}=\frac{5}{12}.V_{ABCD.A'D'C'B'}=\frac{5275}{6}$.

Câu 33: Chọn A

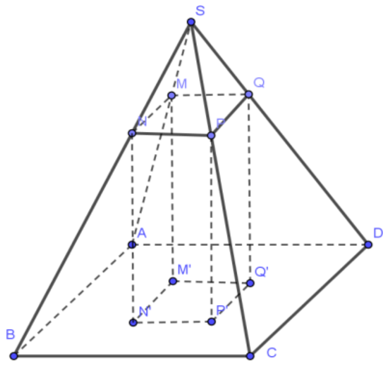


Vì $SA=SB=SC=SD=\sqrt{2}a$ nên hình chiếu vuông góc hạ từ đỉnh S xuống đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy, tức là trùng với điểm $O=AC\cap BD$.

Ta có: $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{2a^2-\frac{4a^2+a^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Ta có: $V_{S.ABEF}=V_{S.ABE}+V_{S.AEF}=\frac{SE}{SC}.V_{SABC}+\frac{SE}{SC}.\frac{SF}{SD}.V_{SACD}=\frac{2}{3}.\left(\frac{\sqrt{3}a^3}{6}\right)+\frac{2}{3}.\frac{1}{4}.\left(\frac{\sqrt{3}a^3}{6}\right)=\frac{5\sqrt{3}a^3}{36}$.

Câu 34: Chọn B



Đặt $\frac{SM}{SA}=x\left(0<x<1\right)$, kí hiệu V,h lần lượt là thể tích và chiều cao của khối chóp đã cho.

Theo định lý Ta-let, ta có: $\frac{MN}{AB}=\frac{NP}{BC}=\frac{PQ}{CD}=\frac{QM}{DA}=\frac{SM}{SA}=x$

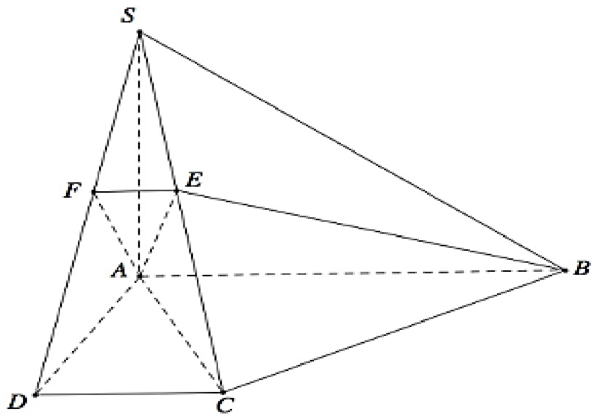
Và $\frac{d\left(M,\left(ABCD\right)\right)}{d\left(S,\left(ABCD\right)\right)}=\frac{AM}{SA}=1-x\ \Rightarrow d\left(M,\left(ABCD\right)\right)=\left(1-x\right)h$.

Vì vậy $V_{MNPQ.M'N'P'Q'}=MN.MQ.d\left(M,\left(ABCD\right)\right)=x^2.\left(1-x\right)h.AB.AD=3x^2\left(1-x\right)V$

Theo BDT Co-si, ta có: $x^2\left(1-x\right)=\frac{1}{2}x.x.\left(2-2x\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{x+x+2-2x}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$.

Do đó, $V_{MNPQ.M'N'P'Q'}\le\frac{4}{9}V$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=2-2x\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

Câu 35: ChọnA



Ta có: $\begin{cases}\left(ABE\right)\cap\left(SDC\right)=Ex\\ AB\|DC\end{cases}\Rightarrow Ex\|DC\|AB$.

Gọi $F=Ex\cap SD$, $\frac{SE}{SC}=x,\left(0<x<1\right)\ \Rightarrow\frac{SF}{SD}=\frac{SE}{SC}=x$.

Do $ABCD$ là hình thang có $AB=2CD$ nên $S_{\Delta ACB}=2S_{\Delta ADC}\Rightarrow S_{\Delta ADC}=\frac{1}{3}S_{\square ABCD};S_{\Delta ACB}=\frac{2}{3}S_{\square ABCD}$.

.

Ta có:

$\frac{V_{S.ACD}}{V_{S.ABCD}}=\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\square ABCD}}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{S.ACD}=\frac{1}{3}V_{S.ABCD}$

$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\square ABCD}} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{2}{3} V_{S.ABCD}$.

Lại có: $\frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ACD}} = \frac{SE}{SC}.\frac{SF}{SD} = x^2 \Rightarrow V_{S.AEF} = x^2.V_{S.ACD} = \frac{1}{3}x^2.V_{S.ABCD}$)

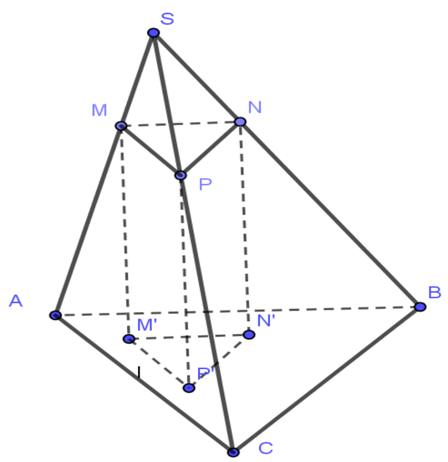
$\frac{V_{S.ABE}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SC} = x \Rightarrow V_{S.ABE} = x.V_{S.ABC} = \frac{2}{3}x.V_{S.ABCD}$).

Theo bài ra mặt phẳng (ABE)chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích bằng nhau nên $V_{S.ABEF} = \frac{1}{2}V_{SABCD}$

$\Leftrightarrow V_{S.AEF} + V_{S.ABE} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\right).V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-2+\sqrt{10}}{2} \\ x = \frac{-2-\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$. Do $0 < x < 1 \Rightarrow x = \frac{-2+\sqrt{10}}{2}$.

Câu 36: Chọn B



Đặt $\frac{SM}{SA} = x\left(0 < x < 1\right)$, kí hiệu V, h lần lượt là thể tích và chiều cao của khối chóp đã cho.

Theo định lý Ta-let, ta có: $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{SM}{SA} = x$

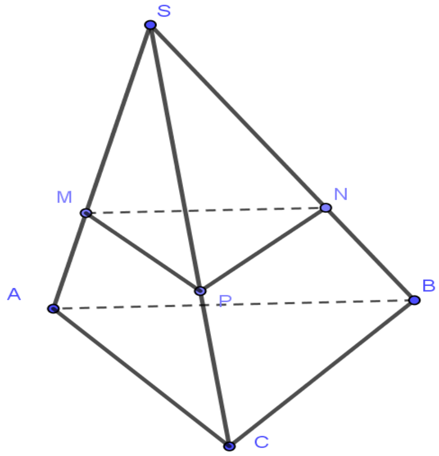
Và $\frac{d\left(M,\left(ABC\right)\right)}{d\left(S,\left(ABC\right)\right)} = \frac{AM}{SA} = 1 - x \ \Rightarrow d\left(M,\left(ABC\right)\right) = \left(1-x\right)h$.

Vì vậy $V_{MNP.M'N'P'} = S_{MNP}.d\left(M,\left(ABCD\right)\right) = x^2.\left(1-x\right)h.S_{ABC} = 3x^2\left(1-x\right)V$

Theo BĐT Co-si, ta có: $x^2\left(1-x\right) = \frac{1}{2}x.x.\left(2-2x\right) \le \frac{1}{2}\left(\frac{x+x+2-2x}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$.

Do đó, $V_{MNP.M'N'P'} \le \frac{4}{9}V$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2-2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

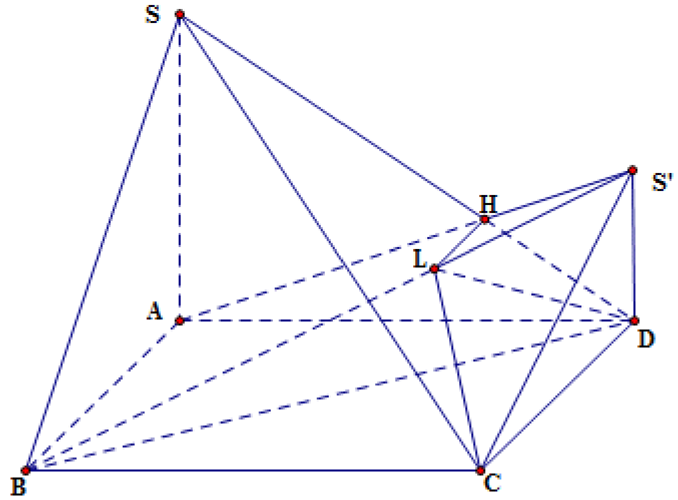
Câu 37: Chọn A



Đặt $\frac{SM}{SA} = x\left(0 < x < 1\right)$. Theo định lý Ta-let, ta có: $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = x$

Và $V_{S.MNP} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}V_{S.ABC} = x^3.V_{S.ABC}$ Theo giả thiết, $V_{S.MNP} = \frac{1}{2}V_{S.ABC}$ nên $x^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Câu 38: Chọn C



Ta có $V_2 = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD}$, $V_{S'.ABCD} = \frac{1}{3}S'D.S_{ABCD} = \frac{1}{2}V_2$.

Gọi $H = S'A \cap SD$, $L = S'B \cap \left(SCD\right)$ khi đó thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là thể tích khối $HLCDAB$. Do $AB//CD$ nên giao tuyến HL của hai mặt $\left(S'AB\right)$ và $\left(SCD\right)$ phải song song với AB.

$V_1 = V_{HLCDAB} = V_{S'.ABCD} - V_{S'.HLCD}$; $\frac{S'H}{HA} = \frac{S'D}{SA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S'H}{S'A} = \frac{1}{3}$

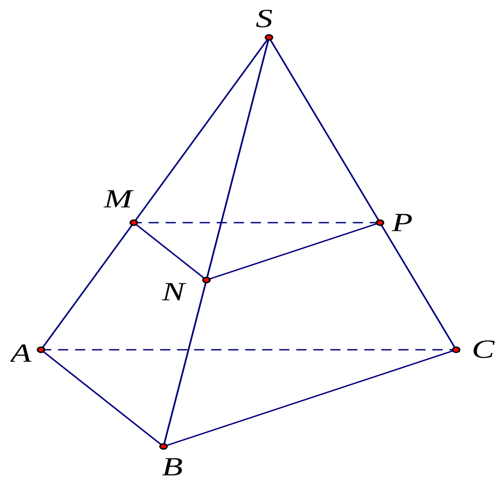
$\frac{V_{S'.HLD}}{V_{S'.ABD}} = \frac{S'H.S'L}{SA.SB} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow V_{S'.HLD} = \frac{1}{9}V_{S'.ABD} = \frac{1}{18}V_{S'.ABCD}$

$$\frac{V_{S'.LCD}}{V_{S'.BCD}}=\frac{S'L}{S'B}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{S'.LCD}=\frac{1}{3}V_{S'.BCD}=\frac{1}{6}V_{S'.ABCD}$$

$$V_{S'.HLCD}=V_{S'.HLD}+V_{S'.LCD}=\frac{1}{18}V_{S'.ABCD}+\frac{1}{6}V_{S'.ABCD}=\frac{2}{9}V_{S'.ABCD}$$

$\Rightarrow V_1=V_{S'.ABCD}-V_{S'.HLCD}=\frac{7}{9}V_{S'.ABCD}=\frac{7}{18}V_2$. Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{18}$

Câu 39: Chọn D



Mặt phẳng (P) song song với (ABC) và cắt các cạnh bên SA,SB,SC lần lượt tại M,N,P.

Theo Ta-let ta có: $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}=\frac{SP}{SC}=x>0$.

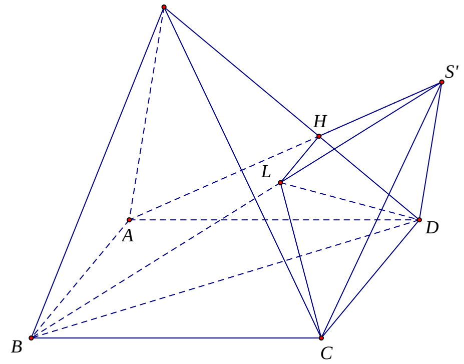
Do đó $\frac{V_{S.MNP}}{V_{SABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}=x^3>0$.

Theo giả thiết: $\frac{V_{S.MNP}}{V_{SABC}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^3=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\Rightarrow\frac{MN}{AB}=\frac{SM}{SA}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\Rightarrow MN=\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

Vì tam giác ABC đều cạnh a nên tam giác MNP là tam giác đều có cạnh bằng $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

Vậy $S_{MNP}=\frac{\left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4\sqrt[4]{4}}$.

Câu 40: Chọn C



Ta có $\dfrac{V_{S'.ABCD}}{V_2}=\dfrac{S'D}{SA}=k$.

Gọi $H=S'A\cap SD$, $L=S'B\cap(SCD)$ khi đó thể tích chung của hai khối chóp $S.ABCD$ và $S'.ABCD$ là thể tích khối $HLCDAB$. Do $AB//CD$ nên giao tuyến HL của hai mặt $(S'AB)$ và (SCD) phải song song với AB. $V_1=V_{HLCDAB}=V_{S'.ABCD}-V_{S'.HLCD}$.

$$\frac{S'H}{HA}=\frac{S'D}{SA}=k\Rightarrow\frac{S'H}{S'A}=\frac{k}{k+1}\Rightarrow\frac{S'L}{S'B}=\frac{k}{k+1}$$

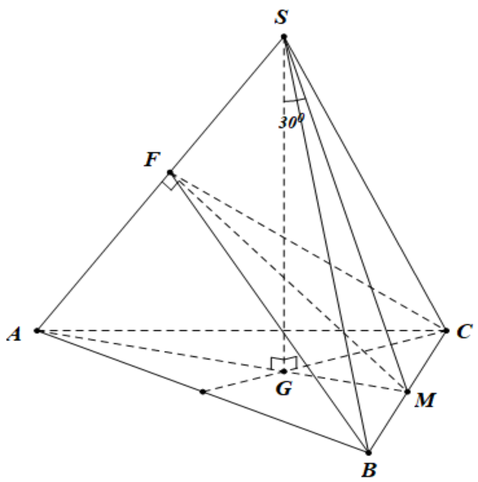
$$\frac{V_{S'.HLD}}{V_{S'.ABD}}=\frac{S'H.S'L}{SA.SB}=\frac{k^2}{(k+1)^2}\Rightarrow V_{S'.HLD}=\frac{k^2}{(k+1)^2}V_{S'.ABD}=\frac{k^2}{2(k+1)^2}V_{S'.ABCD}$$

$$\frac{V_{S'.LCD}}{V_{S'.BCD}}=\frac{S'L}{S'B}=\frac{k}{k+1}\Rightarrow V_{S'.LCD}=\frac{k}{k+1}V_{S'.BCD}=\frac{k}{2(k+1)}V_{S'.ABCD}$$

$$V_{S'.HLCD}=V_{S'.HLD}+V_{S'.LCD}=\frac{k^2}{2(k+1)^2}V_{S'.ABCD}+\frac{k}{2(k+1)}V_{S'.ABCD}=\frac{2k^2+k}{2(k+1)^2}V_{S'.ABCD}$$

$\Rightarrow V_1=V_{S'.ABCD}-V_{S'.HLCD}=\dfrac{3k+2}{2(k+1)^2}V_{S'.ABCD}=\dfrac{3k^2+2k}{2(k+1)^2}V_2$. Vậy $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{3k^2+2k}{2(k+1)^2}$.

Câu 41: Chọn B



Gọi M là trung điểm BC, $F=SA\cap(\alpha)$, trong đó (α) là mặt phẳng chứa BC và vuông góc SA, H là hình chiếu của G lên SM. Ta có: $SA\perp(\alpha)$, $FM\subset(\alpha)$ nên $SA\perp FM$.

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên SG là đường cao hình chóp ứng với đáy (ABC) và ABC là tam giác đều.

Ta có:

AM vừa là đường trung tuyến, vừa là đường cao trong tam giác đều nên $AM\perp BC$.

$SG\perp(ABC)$, $BC\subset(ABC)$ nên $SG\perp BC$.

$AM\cap SG=G$ và $AM,SG\subset(SAM)$.

Suy ra $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp GH$. Do đó: $\begin{cases} GH \perp SM \\ GH \perp BC \\ SM \cap BC = M \\ SM, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow GH \perp (SBC)$.

Ta lại có: $\begin{cases} SG \cap (SBC) = S \\ SH \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow SH$ là hình chiếu vuông góc của SG lên (SBC).

$\Rightarrow \left(SG,(SBC)\right) = \left(SG,SH\right) = GSH = 30°$.

Giả sử cạnh của tam giác đều ABC là a.

Xét tam giác SGM vuông tại G, ta có: $SG = GM\cot 30° = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác SAG vuông tại G, ta có: $SA = \sqrt{AG^2 + SG^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

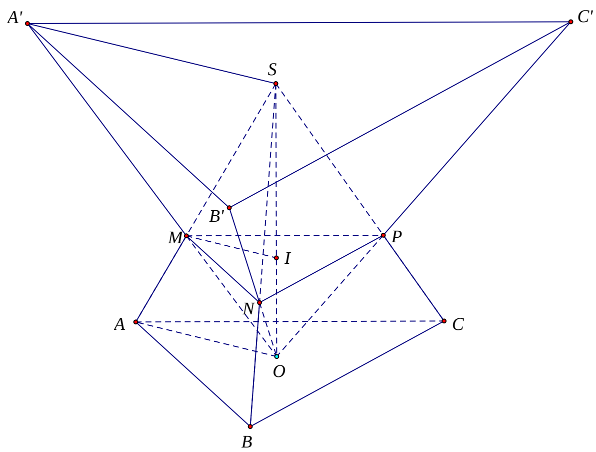
Trong tam giác SAM, ta có: $MF = \frac{SG.AM}{SA} = \frac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{21}}{6}} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}$.

Xét tam giác AFM vuông tại F, ta có: $FA = \sqrt{AM^2 - FM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a\sqrt{7}}{14}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Suy ra $\frac{SF}{SA} = 1 - \frac{FA}{SA} = 1 - \frac{\frac{a\sqrt{21}}{7}}{\frac{a\sqrt{21}}{6}} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$. Mà $\frac{V_{S.FBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SF}{SA} = \frac{1}{7} \Rightarrow V_1 = V_{S.FBC} = \frac{1}{7}V_{S.ABC}$

$\Rightarrow V_2 = \frac{6}{7}V_{S.ABC}$. Do đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{6}$.

Câu 42: Chọn A



Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của mỗi cạnh bên SA, SB, SC tương ứng với các cạnh bên OA', OB', OC'. Phần chung của hai khối chóp $S.ABC$ và $O.A'B'C'$ là khối đa diện $SMNPO$.

Từ giả thiết ta có $(ABC) // (A'B'C')$ mà ta có $MN // AB // A'B'$, $NP // AC // A'C'$ do đó $(ABC) // (MNP)$, $(A'B'C') // (MNP)$ và ΔMNP đều.

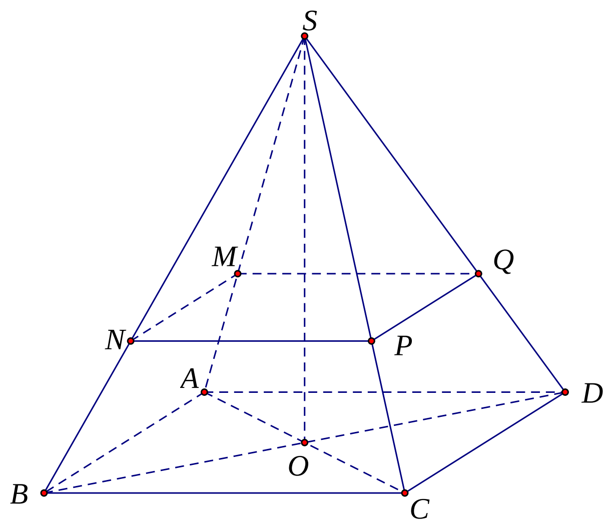
Xét các tam giác vuông SMI và OMI ta có $SI=\frac{MI}{\tan 30^0}=MI\sqrt{3}$, $OI=\frac{MI}{\tan 60^0}=\frac{MI}{\sqrt{3}}$ suy ra $\frac{SI}{OI}=3$ suy ra $\frac{SI}{SO}=\frac{MN}{AB}=\frac{3}{4}$, $\frac{OI}{OS}=\frac{MN}{A'B'}=\frac{1}{4}$.

Suy ra $\frac{A'B'}{AB}=3$ hay $\frac{V_{O.A'B'C'}}{V_2}=3^2=9\Rightarrow V_{O.A'B'C'}=9V_2$

Do đó $\frac{V_{S.MNP}}{V_2}=\left(\frac{SI}{SO}\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$

$\frac{V_{O.MNP}}{V_{O.A'B'C'}}=\left(\frac{OI}{OS}\right)^3=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}\Rightarrow\frac{V_{O.MNP}}{V_2}=\frac{9}{64}$. Từ đó $\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_{OMNP}+V_{SMNP}}{V_2}=\frac{27}{64}+\frac{9}{64}=\frac{9}{16}$.

Câu 43: Chọn D



Giả sử cắt viên đá khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ theo mặt phẳng $(MNPQ)$ song song với $(ABCD)$ như hình vẽ.

Theo Ta-let ta có: $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}=\frac{SP}{SC}=\frac{SQ}{SD}=x>0$.

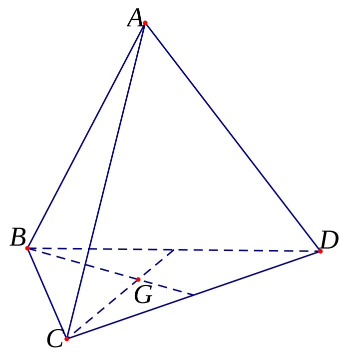
Theo giả thiết ta có:

$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{V_{S.MNP}+V_{S.MPQ}}{2V_{S.ABC}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}}+\frac{V_{S.MPQ}}{V_{S.ACD}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SC}\left(\frac{SN}{SB}+\frac{SQ}{SD}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow 2x^3=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\Rightarrow\frac{MN}{AB}=\frac{SM}{SA}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\Rightarrow MN=\frac{a}{\sqrt[3]{4}}.$$

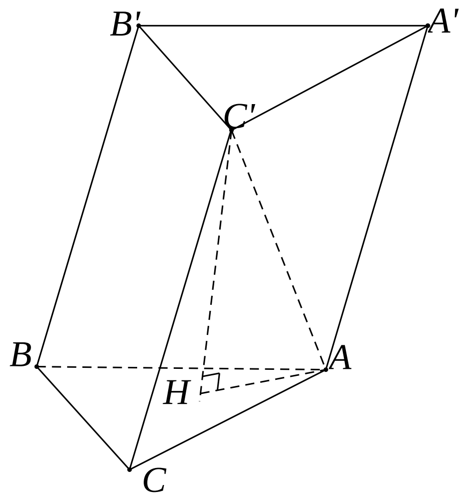
Vì $ABCD$ là hình vuông nên $MNPQ$ là hình vuông cạnh $\frac{a}{\sqrt[3]{4}}$. Vậy $S_{MNPQ}=\left(\frac{a}{\sqrt[3]{4}}\right)^2=\frac{a^2}{2\sqrt[3]{2}}$.

Câu 44: Chọn B



Ta có $\frac{V_{A.GBC}}{V_{A.BCD}}=\frac{S_{GBC}}{S_{BCD}}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_{A.GBC}=\frac{1}{3}V_{A.BCD}=4$.

Câu 45: Chọn B

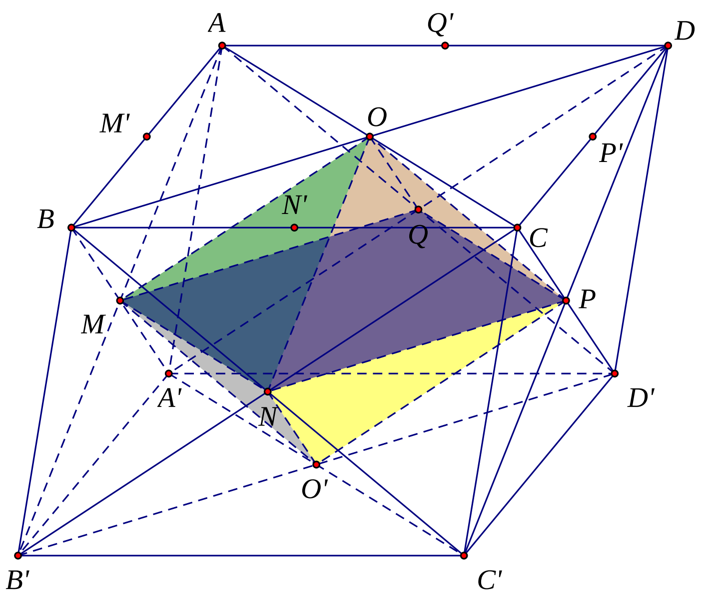


Ta có $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC^2=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2=4$ và $d\left(C',\left(ABC\right)\right)=C'H=AC'.\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$.

Khi đó, $V_{ABCB'C'}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{A.A'B'C'}=V_{ABC.A'B'C'}-\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{2}{3}.4.2\sqrt{3}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$

.

Câu 46: Chọn B

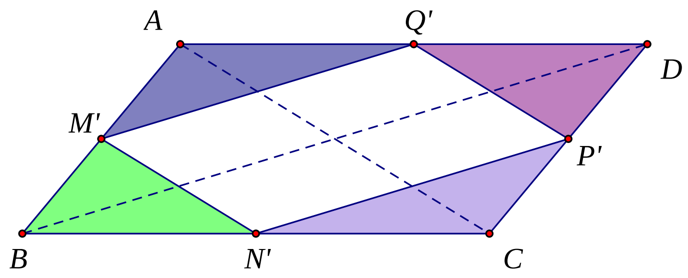


Gọi O, O', M,N,P,Q lần lượt là tâm của các hình chữ nhật $ABCD$, $A'B'C'D'$, $A'B'BA$, $BB'C'C$, $CC'D'D$, $AA'D'D$.

Ta có phần chung của hai khối tứ diện $A'BC'D$ và $AB'CD'$ là bát diện $OMNPQO'$.

Gọi M',N',P',Q' lần lượt là trung điểm của AB,BC,CD,DA. Ta có

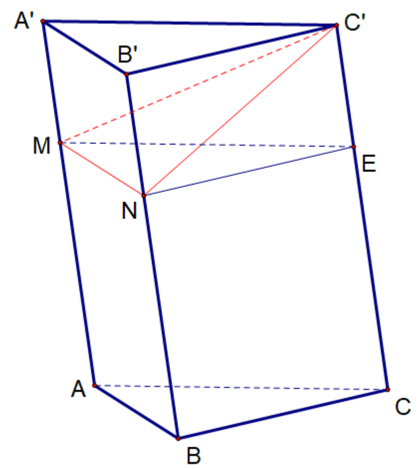
$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCB}}=\frac{S_{M'N'P'Q'}}{S_{ABCB}}=\frac{S_{ABCB}-S_{AM'Q'}-S_{BM'N'}-S_{CN'P'}-S_{DP'Q'}}{S_{ABCB}}=\frac{S_{ABCB}-4.\frac{1}{8}.S_{ABCB}}{S_{ABCB}}=\frac{1}{2}$$



Ngoài ra, chiều cao của khối chóp $V_{O.MNPQ}$ bằng $\frac{1}{2}$ chiều cao của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Suy ra $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2V_{O.MNPQ}}{V_2}=2.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

Câu 47: Chọn B



Đặt $V=V_{ABC.A'B'C'}$. Lấy điểm E trên CC' sao cho $CC'=3C'E$.

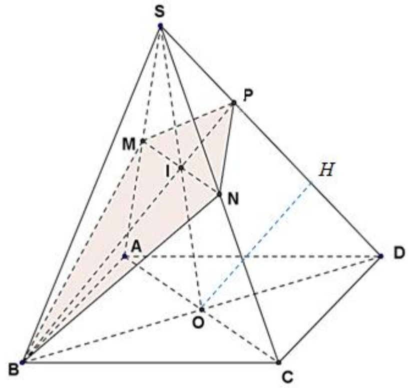
Suy ra $\frac{A'M}{A'A}=\frac{B'N}{B'B}=\frac{C'E}{C'C}=\frac{1}{3}\Rightarrow (MNE)//(ABC)$.

Ta có: $V_{C'.MNE}=\frac{1}{3}V_{A'B'C'.MNE}$

$\Rightarrow V_1=\frac{2}{3}V_{A'B'C'.MNE}$. Mặt khác: $V_{A'B'C'.MNE}=\frac{1}{3}V$.

Suy ra $V_1=\frac{2}{3}.\frac{1}{3}V=\frac{2}{9}V \Rightarrow V_2=V-\frac{2}{9}V=\frac{7}{9}V\Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{7}$.

Câu 48: Chọn B



Ta có M,N là trung điểm của SA,SC nên $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}$.

Cách 1: Áp dụng định lý Menelaus cho ΔSOD ta có :

$\frac{PS}{PD}\cdot\frac{BD}{BO}\cdot\frac{IO}{IS}=1\Rightarrow\frac{PS}{PD}\cdot2\cdot1=1\Rightarrow\frac{PS}{PD}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{SP}{SD}=\frac{1}{3}$.

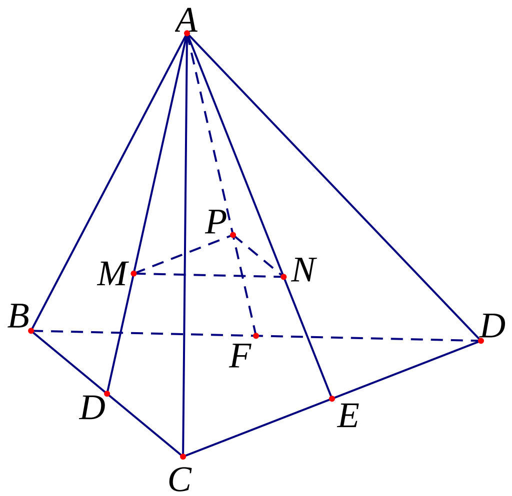
Cách 2: Kẻ $OH//BP$, ta có O là trung điểm của BD nên H là trung điểm của PD.

Ta có $OH//IP$ mà I là trung điểm của SO nên P là trung điểm của SH.

Suy ra $SP=PH=HD\Rightarrow\frac{SP}{SD}=\frac{1}{3}$.

Theo công thức tỉ số thể tích ta có : $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{2V_{S.BMP}}{2V_{S.BAD}}=\frac{SM}{SA}\cdot\frac{SP}{SD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

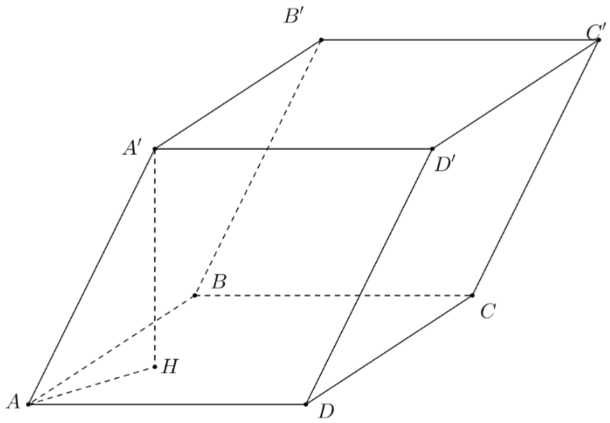
Câu 49: Chọn B



Gọi D,E,F lần lượt là trung điểm các cạnh BC,CD,DB.

Ta có $V_{AMNP}=\left(\frac{2}{3}\right)^3V_{ADEF}=\left(\frac{2}{3}\right)^3.\frac{1}{4}V_{ABCD}=\frac{2}{27}V_{ABCD}=\frac{2}{27}.54=4$.

Câu 50: Chọn D



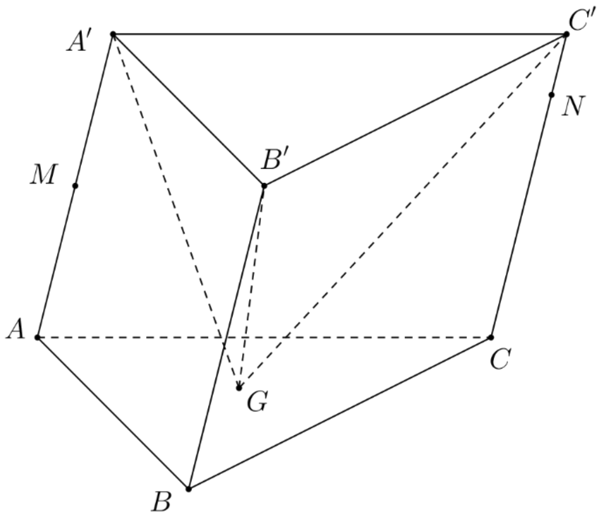
Gọi $A'H$ là đường cao của hình hộp

Khi đó $\left(AA';\left(ABCD\right)\right) = A'AH = 45° \Rightarrow A'H = AA'.\sin 45° = 5\sqrt{2}$.

$S_{ABCD} = 6^2.\sin 45° = 18\sqrt{2}$ .Nên $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H = 180$.

$V_{ABCDD'B'} = V_{A.BDD'B'} + V_{C.BDD'B'} = \frac{2}{3}.V_{ABD.A'B'D'} + \frac{2}{3}V_{BCD.B'C'D'} = \frac{2}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'} = 120$.

Câu 51: Chọn A



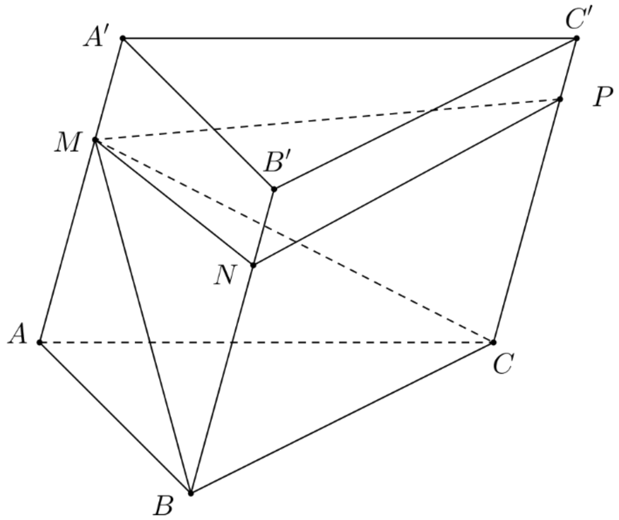
Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$. Ta có $G \in \left(ABC\right)$ nên $V_{G.A'B'C'} = \frac{1}{3}V$.

$V_{BB'MN} = V_{M.BB'N} = V_{A.BB'N} = \frac{1}{2}.V_{A.BB'C'C} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}V = \frac{1}{3}V$; $V_{ABB'C'} = \frac{1}{2}V_{A.BB'C'C} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}V = \frac{1}{3}V$.

Ta có $\frac{S_{CBN}}{S_{CBC'}} = \frac{CN}{CC'} = \frac{4}{5}$ nên $V_{A'BCN} = \frac{4}{5}V_{A'BCC'} = \frac{4}{5}.\frac{1}{2}V_{A'BCC'B'} = \frac{4}{5}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}V = \frac{4}{15}V$

Vậy khối tứ diện $A'BCN$ có thể tích nhỏ nhất.

Câu 52: Chọn C

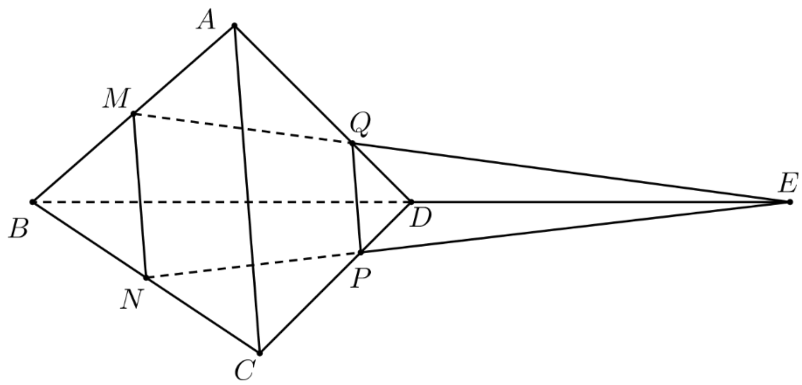


Gọi d là khoảng cách giữa BB' và CC'.

Ta có $S_{BCPN}=\frac{1}{2}(CP+BN).d=\frac{1}{2}.\left(\frac{3}{4}BB'+\frac{4}{5}CC'\right).d=\frac{1}{2}.\frac{31}{20}BB'.d=\frac{31}{40}.S_{BCC'B'}$.

Do đó $V_{BCMNP}=V_{M.BCPN}=\frac{31}{40}V_{M.BCC'B'}=\frac{31}{40}.\frac{2}{3}.V_{ABC.A'B'C'}=\frac{31}{40}.\frac{2}{3}.60=31$.

Câu 53: Chọn D



Gọi $P=CD\cap NE$, $Q=AD\cap ME$, khi đó (MNE) chia hình chóp là hai khối đa diện gồm $ACMNPQ$ và $BMNDQP$.

Dễ dàng chứng minh được P, Q lần lượt là trọng tâm tam giác EBC và EAB. Khi đó: $\frac{EQ}{EM}=\frac{EP}{EN}=\frac{2}{3}$. Ta có $V_{E.DQP}=\frac{ED}{EB}.\frac{EQ}{EM}.\frac{EP}{EN}.V_{E.BMN}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}V_{E.BMN}=\frac{2}{9}V_{E.BMN}$

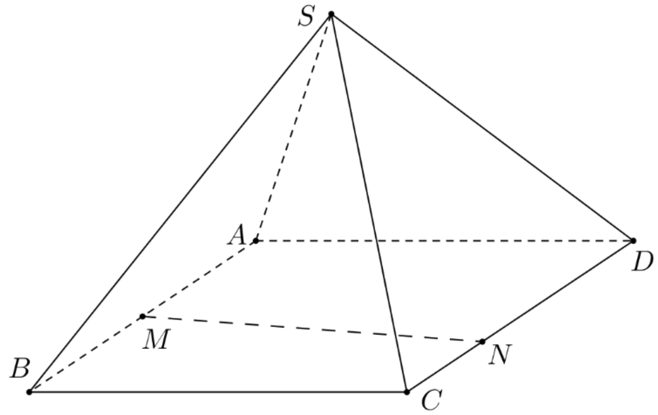
$\Rightarrow V_{BMNDQP}=V_{E.BMN}-V_{E.DQP}=\frac{7}{9}V_{E.BMN}$.

Lại có $S_{\Delta BMN}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$, $\frac{d(E;(ABC))}{d(D;(ABC))}=\frac{EB}{DB}=2$

Nên $\frac{V_{E.BMN}}{V_{D.ABC}}=\frac{d(E;(ABC)).S_{\Delta BMN}}{d(D;(ABC)).S_{\Delta ABC}}=2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ suy ra $V_{BMNDQP}=\frac{7}{9}.\frac{1}{2}.V_{D.ABC}=\frac{7}{18}.V_{D.ABC}$

$\Rightarrow V=V_{ACMNPQ}=V_{D.ABC}-V_{DMBDQP}=\frac{11}{18}.V_{D.ABC}=\frac{11}{18}.\frac{\sqrt{2}a^3}{12}=\frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$.

Câu 54: Chọn C

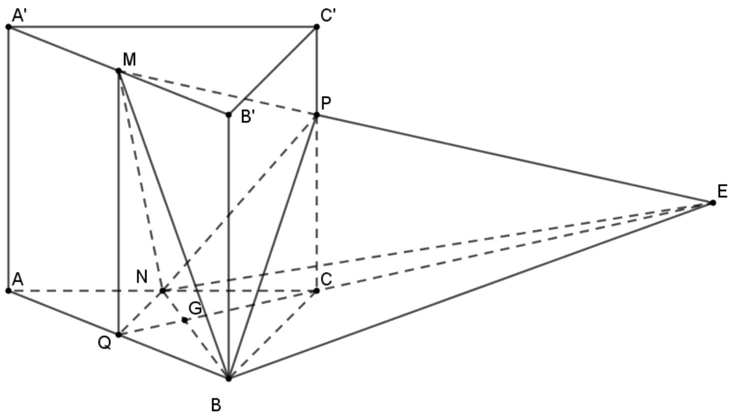


Gọi d là khoảng cách giữa AB và CD.

Ta có $S_{MBCN}=\frac{1}{2}\left(BM+CN\right).d=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}AB+\frac{1}{3}CD\right).d=\frac{1}{2}.\frac{5}{6}.AB.d=\frac{5}{12}.S_{ABCD}$.

Nên $V_{S.MBCN}=\frac{5}{12}V_{S.ABCD}=\frac{5}{12}.48=20$.

Câu 55:Chọn A



Gọi B là diện tích tam giác ABC, h là độ dại đường cao của hình lăng trụ, suy ra $V=B.h$. Gọi Q là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi V_1 là thể tích khối chóp $BMNP$, V_2 là thể tích khối chóp $MBNE$ với $E=QC\cap MP$.

Ta có $\frac{PE}{ME}=\frac{CE}{QF}=\frac{PC}{MQ}=\frac{2}{3}$ do $PC//MQ$ và $PC=2PC'$ nên $\frac{PC}{MQ}=\frac{PC}{CC'}=\frac{2}{3}$.

Ta có $\frac{V_1}{V_2}=\frac{MP}{ME}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_1=\frac{1}{3}V_2$.

Do $GC=\frac{2}{3}QC,CE=2QC\Rightarrow GE=GC+CE=\frac{8}{3}QC$.

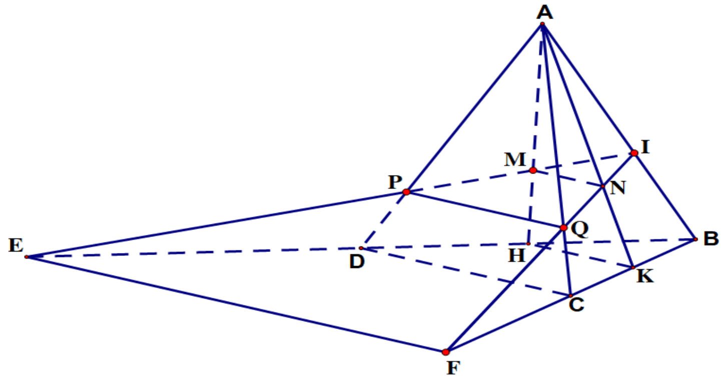
Ta lại có $V_2=\frac{1}{3}S_{BNE}.h$. Ta tính diện tích tam giác BNE theo diện tích tam giác ABC ta có

$S_{BNE}=S_{BGE}+S_{NGE}=\frac{8}{3}\left(S_{NQC}+S_{BQC}\right)=\frac{8}{3}S_{QBNC}$.

Mà $\frac{S_{AQN}}{S_{ABC}}=\frac{AQ}{AB}.\frac{AN}{AC}=\frac{1}{4}\Rightarrow S_{QBCN}=\frac{3}{4}S_{ABC}$ do đó $S_{BNE}=\frac{8}{3}S_{QBNC}=2B$.

Nên $V_2=\frac{1}{3}S_{BNE}.h=\frac{1}{3}.2B.h=\frac{2V}{3}\Rightarrow V_1=\frac{1}{3}V_2=\frac{2V}{9}$.

Câu 56: Chọn A



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BD, BC và $I = EM \cap AB$. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác AHB ta được $\frac{AM}{MH}.\frac{HE}{EB}.\frac{BI}{IA} = 1 \Leftrightarrow 2.\frac{3}{4}.\frac{BI}{IA} = 1 \Leftrightarrow \frac{BI}{IA} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow AI = \frac{3}{5}AB$

$\frac{AI}{AB} = \frac{3}{5} \neq \frac{AN}{AK} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ Hai đường thẳng IN và BC cắt nhau, gọi giao điểm là F.

Gọi $P = EM \cap AD$. Vì $MN//CD$ nên áp dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng

Ta có $PQ//EF//CD$.

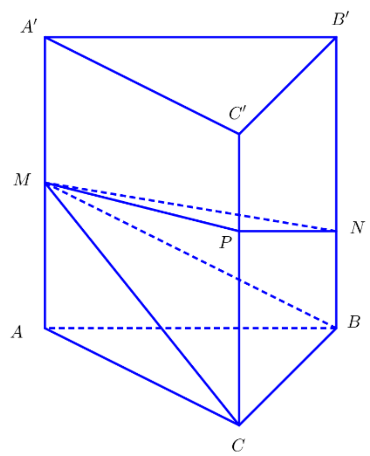
Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ADB ta được

$\frac{AP}{PD}.\frac{DE}{EB}.\frac{BI}{IA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AP}{PD}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{AP}{PD} = 3.$

Có $ABCD$ là tứ diện đều cạnh bằng $a \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$\frac{V_{APQI}}{V_{ABCD}} = \frac{AP}{AD}.\frac{AQ}{AC}.\frac{AI}{AB} = \frac{3}{4}.\frac{3}{4}.\frac{3}{5} = \frac{27}{80} \Rightarrow V_{APQI} = \frac{27}{80}V_{ABCD} = \frac{27}{80}.\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Vậy $V_{APQI} = \frac{9\sqrt{2}a^3}{320}$.

Câu 57: Chọn C



Ta có $V_{ABC.NMP} = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN}$

Trong đó $V_{M.ABC} = \frac{1}{3}d\left(M,\left(ABC\right)\right).S_{ABC} = \frac{x}{3}V$

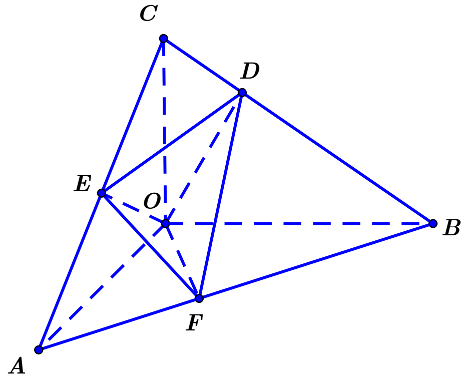
$V_{M.BCPN} = \frac{S_{BCPN}}{S_{BCC'B'}}V_{M.BCC'B'} = \frac{BP+CN}{BB'+CC'}V_{A.BCC'B'}$

$= \frac{y+z}{1+1}.\frac{2}{3}V = \frac{y+z}{3}V$.

Khi đó $V_{ABC.MNP} = \frac{x+y+z}{3}V$.

Vậy $V_{ABC.MNP} = \frac{1}{2}V \Leftrightarrow \frac{x+y+z}{3}V = \frac{1}{2}V \Leftrightarrow x+y+z = \frac{3}{2}$.

Câu 58: Chọn A



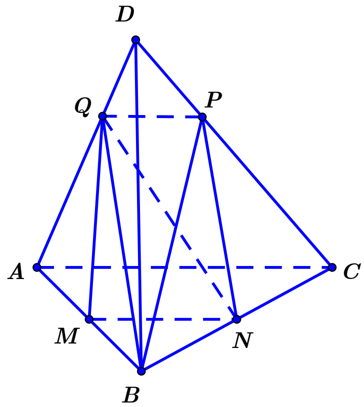
Ta có $\frac{CE}{CA}=\frac{CO^2}{CA^2}=\frac{9}{10}\Rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{1}{10}$, $\frac{CD}{CB}=\frac{CO^2}{CB^2}=\frac{9}{13}\Rightarrow\frac{BD}{BC}=\frac{4}{13}$, $\frac{AF}{AB}=\frac{AO^2}{AB^2}=\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{BF}{BA}=\frac{4}{5}$.

Ta có thể tích khối tứ diện $OABC: V_0=\frac{1}{6}OA.OB.OC=1$.

Ta có: $V_{A.OEF}=\frac{AO}{AO}.\frac{AE}{AC}.\frac{AF}{AB}V_0=\frac{1}{50}V_0$, $V_{C.OED}=\frac{CO}{CO}.\frac{CE}{CA}.\frac{CD}{CB}V_0=\frac{81}{130}V_0$,

$V_{B.ODF}=\frac{BO}{BO}.\frac{BD}{BC}.\frac{BF}{BA}V_0=\frac{16}{65}V_0$. Vậy $V_{ODEF}=\left(1-\frac{1}{50}-\frac{81}{130}-\frac{16}{65}\right)V_0=\frac{36}{325}V_0=\frac{36}{325}$.

Câu 59: Chọn B



Có $MN // AC\Rightarrow(MNP)\cap(ACD)=PQ // MN // AC$. Ta chia khối đa diện thánh các khối tứ diện $V_{BMNPQD}=V_{D.PQB}+V_{B.MNQ}+V_{B.PQN}$.

Thể tích khối tứ diện đều đã cho là $V_0=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

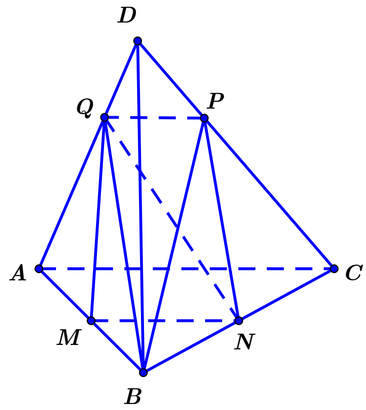
Ta có $V_{D.PQB}=\frac{DP}{DC}.\frac{DQ}{DA}.\frac{DB}{DB}V_0=\left(\frac{2}{3}\right)^2V_0=\frac{4}{9}V_0$.

Và $V_{B.MNQ}=\frac{BM}{BA}.\frac{BN}{BC}.\frac{BQ}{BQ}V_{B.ACQ}=\frac{1}{4}V_{B.ACQ}=\frac{1}{4}.\frac{S_{ACQ}}{S_{ACD}}V_0=\frac{1}{4}.\frac{AQ}{AD}V_0=\frac{1}{12}V_0$.

Và $V_{B.PQN}=\frac{BP}{BP}.\frac{BQ}{BQ}.\frac{BN}{BC}V_{B.PQC}=\frac{1}{2}V_{B.PQC}=\frac{1}{2}.\frac{S_{PQC}}{S_{ADC}}V_0=\frac{1}{2}.\frac{2}{9}V_0=\frac{1}{9}V_0$.

Vậy $V_{BMNPQD}=\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}\right)V_0=\frac{23}{36}.\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{23\sqrt{2}}{432}$.

Câu 60: Chọn D



*Có $MN//AC \Rightarrow (MNP)\cap(ACD) = PQ//MN$. Ta chia khối đa diện thánh các khối tứ diện $V_{BMNPQD} = V_{D.PQB} + V_{B.MNQ} + V_{B.PQN}$.

*Thể tích khối tứ diện đều đã cho là $V_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$.

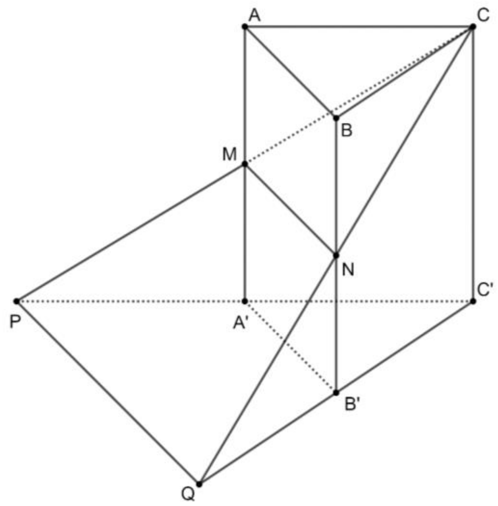
Ta có $V_{D.PQB} = \dfrac{DP}{DC}.\dfrac{DQ}{DA}.\dfrac{DB}{DB}V_0 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 V_0 = \dfrac{1}{9}V_0$.

Và $V_{B.MNQ} = \dfrac{BM}{BA}.\dfrac{BN}{BC}.\dfrac{BQ}{BQ}V_{B.ACQ} = \dfrac{1}{4}V_{B.ACQ} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{S_{ACQ}}{S_{ACD}}V_0 = \dfrac{1}{4}.\dfrac{AQ}{AD}V_0 = \dfrac{1}{6}V_0$.

Và $V_{B.PQN} = \dfrac{BP}{BP}.\dfrac{BQ}{BQ}.\dfrac{BN}{BC}V_{B.PQC} = \dfrac{1}{2}V_{B.PQC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{S_{PQC}}{S_{ADC}}V_0 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{9}V_0 = \dfrac{1}{9}V_0$.

Vậy $V_{BMNPQD} = \left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}\right)V_0 = \dfrac{7}{18}.\dfrac{\sqrt{2}}{12} = \dfrac{7\sqrt{2}}{216}$.

Câu 61: Chọn D

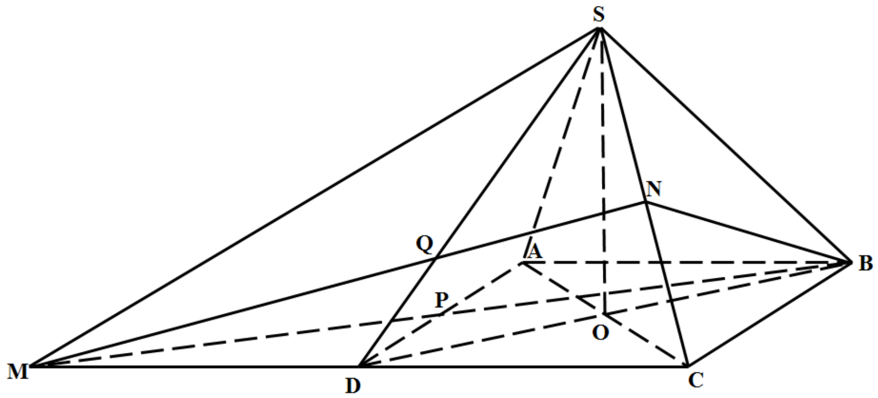


Ta có A' là trung điểm của PC'; B' là trung điểm của QC'. Do đó $V_{C.C'PQ} = \dfrac{S_{C'PQ}}{S_{C'A'B'}}V_{C.A'B'C'} = 4V_{C.A'B'C'} = 4.\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{4}{3}$.

Mặt khác $V_{A'B'C'.MNC} = \dfrac{\dfrac{A'M}{A'A}+\dfrac{B'N}{BB'}+\dfrac{C'C}{C'C}}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{2}{3}$.

Do đó $V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{A'B'C'.MNC} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

Câu 62: Chọn B



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$; $P = MB \cap AD$ và $Q = SD \cap MN$ suy ra Q là trọng tâm của tam giác $SMC \Rightarrow \frac{QD}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{d(Q,(ABCD))}{d(S,(ABCD))} = \frac{1}{3}$.

Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S là $SABPQN$.

Ta có $d(S,(ABCD)) = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

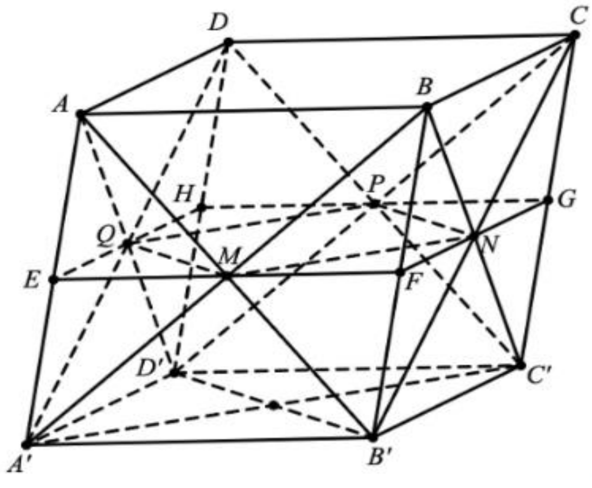
$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}d(S,(ABCD)).S_{ABCD} = \frac{1}{3}SO.AB^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Có $V_{N.BCM} = \frac{1}{3}d(N,(ABCD)).S_{BCM} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}d(S,(ABCD)).\frac{MD.BC}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lạ có $V_{Q.DMP} = \frac{1}{3}d(Q,(DMP)).S_{DMP} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}d(S,(ABCD)).\frac{MD.PA}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{72}$.

Mà $V_{SABPQN} = V_{S.ABCD} + V_{Q.DMP} - V_{N.BCM}$ $V_{SABPQN} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} + \frac{a^3\sqrt{2}}{72} - \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{7a^3\sqrt{2}}{72}$.

Câu 63: Chọn D



Thể tích khối hộp đã cho $V = 6^2.8 = 288$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AA', BB', CC', DD'

Ta có $V_{ACBDMNPQ} = V_{ABCDGH} - \left(V_{A.MNQ} + V_{B.MFN} + V_{C.NGP} + V_{D.PHQ}\right)$

$V_{ABCDGH} = \frac{1}{2}V$, $V_{A.MNQ} = V_{B.MFN} = V_{C.NGP} = V_{D.PHQ} = \frac{DH}{DD'}.\frac{DP}{DC'}.\frac{DQ}{DA'}.V_{D.D'C'A'} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{6}V = \frac{1}{48}V$

Vậy $V_{ACBDMNPQ} = \frac{1}{2}V - \left(\frac{1}{48}V + \frac{1}{48}V + \frac{1}{48}V + \frac{1}{48}V\right) = \frac{5}{12}V = 120$

Câu 64: Chọn D

Ta có $V_1 = V_{S.ADQ} + V_{S.PQD} + V_{S.DNP}$ mà $\frac{V_{S.ADQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}.d\left(S,\left(ABCD\right)\right).S_{\Delta AQD}}{\frac{1}{3}.d\left(S,\left(ABCD\right)\right).S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$.

Và $\frac{V_{S.PQD}}{V_{S.BQD}} = \frac{SP.SQ.SD}{SB.SQ.SD} = \frac{SP}{SB}$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SBC với cát tuyến MPN ta có:

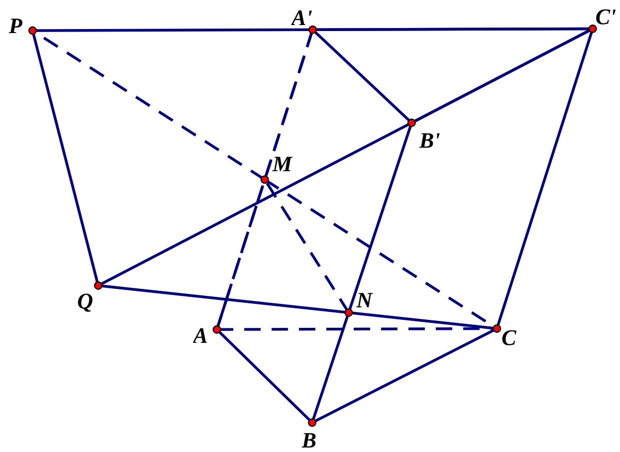
$\frac{MB.\text{PS.NC}}{MC.\text{PB.NS}} = 1 \Rightarrow \frac{PS}{PB} = 2$ suy ra $\frac{SP}{SB} = \frac{2}{3}$

Suy ra $\frac{V_{S.PQD}}{V_{S.BQD}} = \frac{2}{3}$ mà $\frac{V_{S.BDQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}.d\left(S,\left(ABCD\right)\right).S_{\Delta BQD}}{\frac{1}{3}.d\left(S,\left(ABCD\right)\right).S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$ nên $\frac{V_{S.PQD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}$.

Ta lại có: $\frac{V_{S.PND}}{V_{S.BCD}} = \frac{SP.SN.SD}{SB.SC.SD} = \frac{1}{3}$ mà $\frac{V_{S.BCD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}.d\left(S,\left(ABCD\right)\right).S_{\Delta BCD}}{\frac{1}{3}.d\left(S,\left(ABCD\right)\right).S_{ABCD}} = \frac{1}{2}$.

Suy ra $\frac{V_{S.PND}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}$. Vậy $V_1 = \frac{7}{12}V_{S.ABCD}$ suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$

Câu 65: Chọn D



Ta có: $\Delta PA'M = \Delta CAM\left(g.c.g\right) \Rightarrow PA' = A'C' \Rightarrow C'P = 2C'A'$.

$\frac{QB'}{QC'} = \frac{B'N}{C'C} = \frac{2}{3} \Rightarrow QB' = \frac{2}{3}QC' \Rightarrow QC' = 3B'C'$

Ta có: $S_{C'PQ}=\frac{1}{2}C'P.C'Q.\sin C'=\frac{1}{2}.2C'A'.3B'C'.\sin C'=3S_{C'A'B'}$

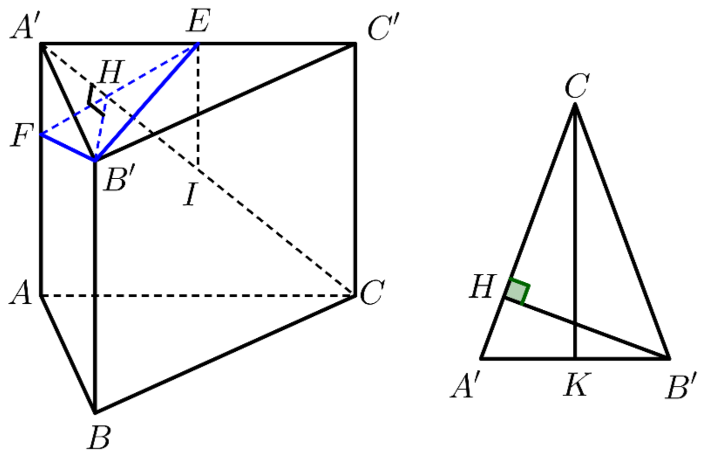
Suy ra: $\frac{V_{C.C'PQ}}{V_{C.C'A'B'}}=\frac{S_{C'PQ}}{S_{C'A'B'}}=3\Rightarrow V_{C.C'PQ}=3.V_{C.C'A'B'}=V_{ABC.A'B'C'}=2$

Mặt khác:

$$\frac{V_{A'B'C'.MNC}}{V_{A'B'C'.ABC}}=\frac{\frac{A'M}{A'A}+\frac{B'N}{B'B}+\frac{C'C}{C'C}}{3}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+1}{3}=\frac{13}{18}\Rightarrow V_{A'B'C'.MNC}=\frac{13}{9}$$

Ta có: $V_{A'MPB'NQ}=V_{C.C'PQ}-V_{A'B'C'.MNC}=2-\frac{13}{9}=\frac{5}{9}$. **Chọn D**

Câu 66: Chọn C



Gọi E, I, K lần lượt là trung điểm $A'C'$, $A'C$ và $A'B'$.

Ta có: $B'E\perp\left(ACC'A'\right)\Rightarrow B'E\perp A'C\quad(1)$

Trong $\left(A'B'C\right)$: từ B' kẻ $B'H\perp A'C$ tại H.

Trong $\left(AA'C'C\right)$: gọi $F=HE\cap AA'$.

Ta lại có $\begin{cases}B'H\perp A'C\\B'E\perp A'C\end{cases}\Rightarrow\left(B'HF\right)\perp A'C\Rightarrow A'C\perp B'F\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác $B'EF$ là thiết diện của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi mặt phẳng (P).

Tam giác $CA'B'$ cân tại C, ta có $CK\cdot A'B'=B'H\cdot A'C\Rightarrow B'H=\frac{CK\cdot A'B'}{A'C}=\frac{\frac{a\sqrt{19}}{2}\cdot a}{a\sqrt{5}}=\frac{a\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$

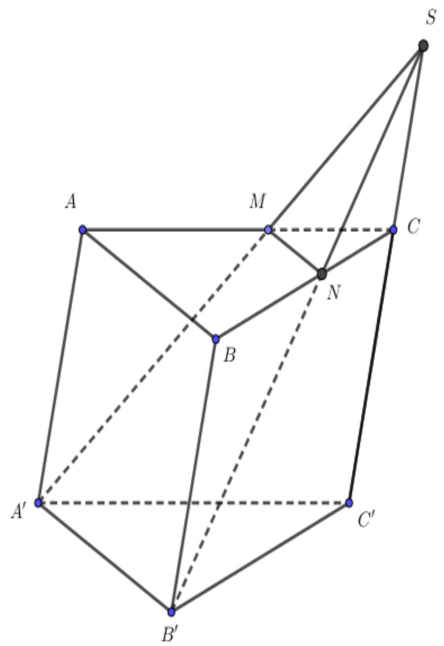
Tam giác $B'HC$ vuông tại H, ta có $CH=\sqrt{B'C^2-B'H^2}=\frac{9a}{2\sqrt{5}}\Rightarrow CH=\frac{9}{10}CA'\Rightarrow A'H=\frac{1}{4}HI$

$\Delta HA'F\sim\Delta HIE\Rightarrow\frac{A'F}{IE}=\frac{A'H}{IH}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{A'F}{A'A}=\frac{1}{8}$.

Khi đó $\frac{V_{A'.B'EF}}{V_{A'.B'C'A}}=\frac{A'B'}{A'B'}.\frac{A'E}{A'C'}.\frac{A'F}{A'A}=\frac{1}{16}\Rightarrow V_{A'.B'EF}=\frac{1}{16}V_{A'.B'C'A}=\frac{1}{16}.\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{1}{48}V_{ABC.A'B'C'}$.

Nên $\frac{V_1}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{1}{48}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{47}$.

Câu 67: **Chọn A**



Vì ba mặt phẳng $(MNB'A'),(ACC'A'),(BCC'B')$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt $A'M,B'N,CC'$ và $A'M,CC'$ không song song nên $A'M,B'N,CC'$ đồng qui tại S.

Ta có $k=\dfrac{CM}{CA}=\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{MN}{A'B'}=\dfrac{SM}{SA'}=\dfrac{SN}{SB'}=\dfrac{SC}{SC'}$

Từ đó $V_{S.MNC}=k^3V_{S.A'B'C'}\Rightarrow V_1=V_{MNC.A'B'C'}=\left(1-k^3\right)V_{S.A'B'C'}$.

Mặt khác $\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{V_{S.A'B'C'}}=\dfrac{3CC'}{SC'}=\dfrac{3\left(SC'-SC\right)}{SC'}=3\left(1-k\right)\Rightarrow V_{S.A'B'C'}=\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{3\left(1-k\right)}$

Suy ra $V_1=\left(1-k^3\right)\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{3\left(1-k\right)}=\dfrac{\left(k^2+k+1\right).V_{ABC.A'B'C'}}{3}$.

Vì $\dfrac{V_1}{V_2}=2$ nên $V_1=\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}\Rightarrow\dfrac{k^2+k+1}{3}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow k^2+k-1=0\Rightarrow k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}(k>0)$.

Vậy $k=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

DẠNG 8 Các bài toán thể tích chọn lọc

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{11}$, côsin góc hợp bởi cạnh SB và $ABCD$ bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{121}{150}a^3$. **B.** $\frac{121}{50}a^3$. **C.** $\frac{121}{500}a^3$. **D.** $\frac{11}{500}a^3$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SB, N là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SN = 2CN$, P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP = 3DP$. Mặt phẳng (MNP) cắt SA tại Q. Biết khối chóp $S.MNPQ$ có thể tích bằng 1, khối đa diện $ABCD.QMNP$ có thể tích bằng

A. 4. **B.** $\frac{9}{5}$. **C.** $\frac{17}{5}$. **D.** $\frac{14}{5}$.

Câu 3: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ tạo với đáy một góc $30°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$ góc α thỏa mãn $\cot\alpha = 2$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{4}{3}a^3\sqrt{11}$. **B.** $\frac{1}{9}a^3\sqrt{11}$. **C.** $\frac{1}{3}a^3\sqrt{11}$. **D.** $\frac{2}{3}a^3\sqrt{11}$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là trung điểm của cạnh BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó theo a.

A. $V = a^3\sqrt{\frac{3}{2}}$. **B.** $V = \frac{2a^3}{3}$. **C.** $V = \frac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. **D.** $V = a^3$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tích của khoảng cách từ điểm B' và điểm D đến mặt phẳng $\left(D'AC\right)$ bằng $6a^2\left(a > 0\right)$. Giả sử thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là ka^2. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $k \in \left(20;30\right)$. **B.** $k \in \left(100;120\right)$. **C.** $k \in \left(50;80\right)$. **D.** $k \in \left(40;50\right)$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $\left(A'BC\right)$ hợp với mặt đáy ABC một góc $30°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \frac{3a^3}{8}$.

Câu 8: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $ABC = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB. Góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy bằng 45^0. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{8}$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 10: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên đáy ABC trùng với trung điểm I của cạnh BC, cạnh bên AA' tạo với đáy ABC góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **B.** $V = \frac{3a^3}{2}$. **C.** $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{16}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 11: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi A', B', C' tương ứng là các điểm đối xứng của A, B, C qua S. Thể tích V của khối bát diện có các mặt $ABC, A'B'C', A'BC, B'CA, C'AB$, $AB'C', BA'C'$, $CA'B'$ là

A. $V = 2\sqrt{3}a^3$. **B.** $V = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Câu 12: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 13: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Một mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với AA' cắt hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{3a^2}{8}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{10}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 14: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{7}}{14}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{7}}{28}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA = a\sqrt{3}$; $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD; mặt phẳng (AMN) cắt SC tại I. Tính thể tích khối đa diện $ABCDMNI$.

A. $V = \frac{5\sqrt{3}a^3}{18}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{18}$. **C.** $V = \frac{5\sqrt{3}a^3}{6}$ **D.** $V = \frac{13\sqrt{3}a^3}{36}$.

Câu 16: Cho tứ diện $OABC$ có $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ và đôi một vuông góc với nhau. Gọi r là bán kính mặt cầu tiếp xúc với cả bốn mặt của tứ diện. Giả sử $a \geq b, a \geq c$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{a}{r}$ là

A. $1+\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3+\sqrt{3}$.

Câu 17: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = BC = a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi *I* là giao điểm của AD' và $A'D$; *H* là hình chiếu của *I* trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$; *K* là hình chiếu của *B* lên mặt phẳng $(CA'B')$. Tính thể tích của khối tứ diện $IHBK$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 18: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khoảng cách giữa AB và $B'C$ là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa BC và AB' là $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa AC và BD' là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối hộp.

A. $4a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $5a^3$. **D.** $2a^3$.

Câu 19: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D', ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D'$. Thể tích khối đa diện có các đỉnh M, P, Q, E, F, N bằng

A. $\frac{V}{4}$. **B.** $\frac{V}{2}$. **C.** $\frac{V}{6}$. **D.** $\frac{V}{3}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{39}}{3}$. Tam giác ABC cân tại A có góc $A = 120°$, $BC = 2a$. G là trọng tâm tam giác SAB. Thể tích khối chóp $G.ABC$ là

A. $\frac{2a^3}{9}$. **B.** a^3. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{9}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến mặt phẳng (SAC) là $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{1}{36}$. **B.** $\frac{1}{48}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

Câu 22: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

A. $\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{2}$.

Câu 23: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. M, N, P lần lượt là trung điểm của CC', $A'C'$, $A'B'$. Biết thể tích của khối $GMNP$ bằng 5, tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. 72. **B.** 21. **C.** 18. **D.** 17.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi N là trung điểm $SB,$ P thuộc đoạn SC sao cho $SP = 2PC, M$ thuộc đoạn SA sao cho $SM = \dfrac{4}{5}MA.$ Mặt phẳng (MNP) cắt SD tại $Q.$ NP cắt BC tại E, CQ cắt DP tại $R.$ Biết rằng thể tích khối chóp $EPQR$ bằng $18cm^3.$ Thể tích khối chóp $SMNPQ$ bằng

A. $65cm^3$. **B.** $\dfrac{260}{9}cm^3$. **C.** $75cm^3$. **D.** $70cm^3$.

Câu 25: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại $A,$ $AB = 1, BC = 2$. Góc $CBB' = 90^0, ABB' = 120^0.$ Gọi M là trung điểm cạnh AA'. Biết $d(AB', CM) = \dfrac{\sqrt{7}}{7}.$ Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 26: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V, đáy là tam giác cân, $AB = AC$. Gọi E là trung điểm cạnh AB và F là hình chiếu vuông góc của E lên BC. Mặt phẳng $(C'EF)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện chứa đỉnh A.

A. $\dfrac{47}{72}V$. **B.** $\dfrac{25}{72}V$. **C.** $\dfrac{29}{72}V$. **D.** $\dfrac{43}{72}V$.

Câu 27: Cho khối đa diện lồi (H) gồm có 8 đỉnh là $A, B, C, D,$ M, N, P, Q; trong đó có hai mặt $(ABCD)$ và $(MNPQ)$ là hai hình vuông song song với nhau; hình chiếu vuông góc của M, N, P, Q lên mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Biết rằng $AM = 3a$, $AB = 4a$. Thể tích khối đa diện (H) được tính theo a bằng

A. $\dfrac{40a^3}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{40a^3\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\dfrac{20a^3\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{18a^3\sqrt{3}}{5}$.

Câu 28: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên đáy $(A'B'C')$ trùng với trung điểm M của cạnh $B'C'$. Góc nhị diện giữa hai mặt phẳng $(AA'B')$ và (ABC) bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. $\dfrac{a^3}{16}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{16}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Câu 29: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp tứ giác $S.ABCD$ tính theo a tương ứng bằng:

A. $\frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{15}+3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}+\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}+1}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{4\sqrt{7}+3}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Biết góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ tương ứng bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Biết góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

Câu 32: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng a. Biết thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\frac{a^3\sqrt{5}}{2}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** a.

Câu 33: Cho khối đa diện lồi (H) gồm có 8 đỉnh là A,B,C,D,M,N,P,Q; trong đó có hai mặt $(ABCD)$ và $(MNPQ)$ là hai hình vuông song song với nhau; hình chiếu vuông góc của M,N,P,Q lên mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC,CD,DA. Biết rằng $AM=AB=4a$. Hãy tính theo a diện tích toàn phần của khối đa diện (H)?

A. $24a^2+16a^2\sqrt{7}+16a^2\sqrt{3}$. **B.** $a^2\sqrt{7}+16a^2\sqrt{3}+36a^2$.

C. $24a^2+8a^2\sqrt{7}+16a^2\sqrt{3}$. **D.** $24a^2+16a^2\sqrt{3}$.

Câu 34: Tỉ lệ diện tích xung quanh của hình lập phương (H_1) (tổng diện tích 4 mặt bên) so với diện tích toàn phần của hình tứ diện đều (H_2) bằng $\sqrt{3}$. Hỏi khi đó tỉ lệ thể tích của hình lập phương (H_1) so với thể tích hình tứ diện đều (H_2) bằng bao nhiêu?

A. $\frac{9\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 35: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên với mặt đáy của lăng trụ là 30^o. Hình chiếu vuông góc của A' lên đáy (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA\perp(ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mp(ABC) bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $2a$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 37: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh $AA',A'D',B'C'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối hình hộp thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2, trong đó $V_1 < V_2$. Tỉ lệ thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ tương ứng bằng:

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{8}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với cạnh huyền $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy ABC nằm trong tam giác ABC. Biết các mặt bên (SAB), (SBC), (SCA) lần lượt tạo với đáy các góc 60^o, 60^o, 45^o. Thể tích của hình chóp $S.ABC$ tính theo a tương ứng bằng:

A. $\frac{3a^3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. **B.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{2a^3}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. **D.** $\frac{6a^3}{2+\sqrt{3}}$.

Câu 39: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A có $AC = 2a$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(ACC'A')$ một góc 30^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. $2a^3\sqrt{2}$. **B.** $4a^3\sqrt{2}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $3a^3\sqrt{3}$.

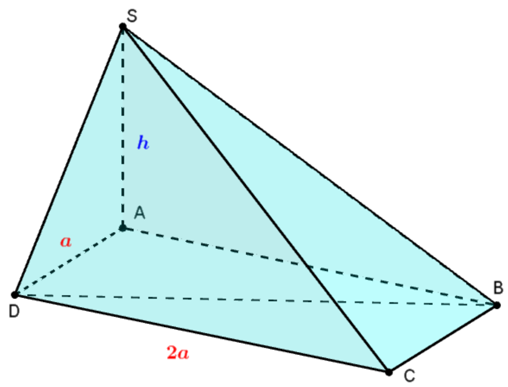
Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết rằng tam giác SAC vuông tại đỉnh S và có diện tích bằng $2a^2$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có giá trị nhỏ nhất là:

A. $8\pi a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** $6\pi a^2$. **D.** $12\pi a^2$.

Câu 41: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích là V. Gọi M,N,P,Q lần lượt là những điểm nằm trên các cạnh SA,SB,SC,SD sao cho $SM = MA, SN = NB, SP = 2PC$, $SQ = 3QD$. Thể tích khối đa diện lồi có 5 đỉnh S,M,N,P,Q tính theo V bằng:

A. $\frac{5V}{24}$. **B.** $\frac{V}{8}$. **C.** $\frac{7V}{16}$. **D.** $\frac{7V}{32}$.

Câu 42: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = 2AD = 2a$ và cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{2a}{3}$. Hãy tính theo a thể tích khối chóp $SABCD$.



A. $\frac{2a^3}{3}$ **B.** $\frac{a^3}{3}$ **C.** $\frac{a^3}{6}$ **D.** $\frac{3a^3}{8}$

Câu 43: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'D'$ có $AB=2, AC=4, BAC=60^0$. Gọi M là trung điểm của CC' và tam giác BMA' vuông tại M. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. 24 **B.** $12\sqrt{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{42}}{3}$ **D.** $2\sqrt{42}$

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SC và N nằm trên cạnh SB sao cho $NS=2NB.$ Biết rằng $MN=\frac{2a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD.$

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt cầu ngoại tiếp là (S), biết (S) có bán kính là 6. Đáy $ABCD$ là tứ giác có $ABC=60^0$ và $AD=CD=4$. Thể tích tứ diện $A'ACD$:

A. $\frac{16\sqrt{15}}{3}$. **B.** $8\sqrt{5}$. **C.** $16\sqrt{3}$. **D.** $\frac{12\sqrt{15}}{5}$.

Câu 46: Cho tứ diện $ABCD$ có (ABC) vuông góc với (BCD) và $BC=6$, $BAC+BDC=90^0$. Chu vi của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và DBC lần lượt là $a\sqrt{3}$ và a. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ tương ứng là?

A. $\sqrt{39}$. **B.** 12. **C.** $\sqrt{41}$ **D.** $2\sqrt{3}$

Câu 47: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1. Gọi M là một điểm di động nằm trên mặt phẳng (ABC). Gọi N là điểm nằm trên đường thẳng MS sao cho $SM.SN=3$. Quỹ tích điểm N khi M thay đổi là một mặt cầu có bán kính bằng $\sqrt{3}$. Biết khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) nhỏ hơn $\sqrt{3}$. Thể tích hình chóp $SABC$ tương ứng bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{15}$.

Câu 48: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABCD$ trùng với tâm O của hình vuông đáy $ABCD$ và chân đường cao H hạ từ đỉnh S xuống đáy $ABCD$ trùng với trung điểm của đoạn thẳng OA. Thể tích hình chóp $SABCD$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{6}}{12}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. **C.** $\frac{1}{8}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi nhưng không là hình vuông, $AB=SA=SB=SD=a$. Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$, khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng:

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 50: Cho một hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Biết rằng $AA' = AB' = 2a$ và hình chiếu vuông góc của A lên cạnh $B'C'$ là điểm M sao cho $\overrightarrow{MB'} + 2\overrightarrow{MC'} = \vec{0}$. Thể tích theo a của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{285}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{95}}{36}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{95}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{95}}{12}$.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC. Mặt phẳng (α) chia khối chóp đã cho thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2 với $V_1 < V_2$. Tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ tương ứng bằng

A. $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{8}$. **D.** $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{3}{5}$.

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AB = 2a$. Có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $ABCD$ và $SA = a\sqrt{3}$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) tương ứng bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

Câu 53: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = \dfrac{9}{2}$ và $AD = \dfrac{2}{3}$. Gọi M là một điểm nằm trên cạnh AB sao cho $MA = 2MB$. Một mặt phẳng thay đổi (α) đi qua M cắt các cạnh AC và AD lần lượt tại N và P sao cho luôn thoả mãn $\dfrac{V_{AMNP}}{V_{ABCD}} = \dfrac{NC}{AN}$. Giá trị nhỏ nhất của $AN + AP$ tương ứng bằng:

A. 3. **B.** $\dfrac{64}{15}$. **C.** $\dfrac{15}{4}$. **D.** $\dfrac{263}{120}$.

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC = a\sqrt{2}$, tam giác SAB đều cạnh a và tam giác SAC vuông tại A. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{6}$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 55: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 6. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là điểm H nằm trong đoạn AC sao cho $HC = 2HA$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng:

A. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Câu 56: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc mặt phẳng đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SDM) bằng $\dfrac{a}{2}$, trong đó M là một điểm nằm trên đoạn BC sao cho $BM = 2MC$. Thể tích khối chóp $SABCD$ tính theo a bằng:

A. $\frac{a^3}{\sqrt{26}}$. **B.** $\frac{2a^3}{\sqrt{26}}$. **C.** $\frac{a^3}{2\sqrt{26}}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{11}}{24}$.

Câu 57: Cho một hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A xuống đáy $(A'B'C')$ là trung điểm M của cạnh $B'C'$, biết rằng $AA'=2a$. Khoảng cách từ C' đến mp (ABA') bằng:

A. $a\sqrt{\frac{39}{55}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{13}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{10}$. **D.** $\frac{a\sqrt{39}}{16}$.

Câu 58: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=2AD=2a$ và $SA=SB=2a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{2}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCD$.

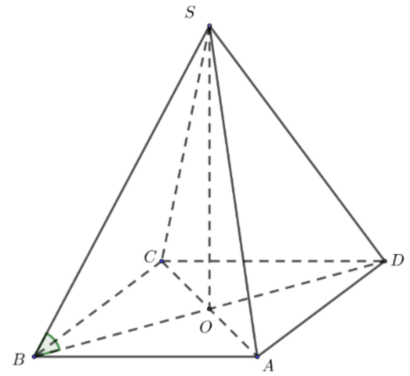
A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $a\frac{\sqrt{16-2\sqrt{3}}}{3}$. **D.** $a\frac{\sqrt{8-\sqrt{5}}}{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.D	4.C	5.C	6.A	7.A	8.A	9.C	10.A
11.B	12.A	13.A	14.A	15.A	16.D	17.C	18.D	19.C	20.D
21.D	22.A	23.A	24.A	25.A	26.B	27.B	28.B	29.B	30.D
31.D	32.C	33.C	34.A	35.B	36.B	37.A	38.C	39.B	40.A
41.D	42.A	43.A	44.C	45.A	46.A	47.B	48.A	49.D	50.D
51.D	52.C	53.C	54.A	55.B	56.B	57.A	58.C		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn C



Gọi cạnh hình vuông đáy là x ,góc hợp bởi cạnh SB và $ABCD$ là góc nhọn $SBO \Rightarrow \cos SMO = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{OB}{SB} = \frac{1}{10}$

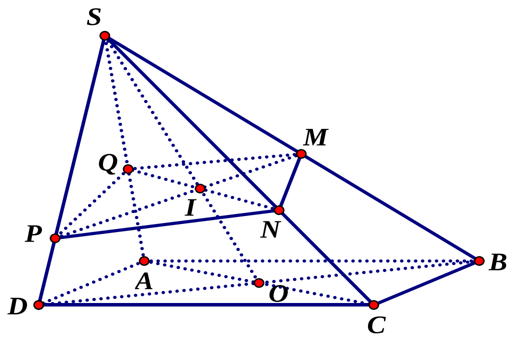
$\Leftrightarrow \frac{x\sqrt{2}}{2.a\sqrt{11}} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{11}}{5\sqrt{2}}a$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

$V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD}$ $= \frac{1}{3}\sqrt{SC^2 - OC^2}.\left(\sqrt{\frac{11}{25.2}}a\right)^2$

$= \frac{\sqrt{11a^2 - \frac{11}{100}a^2}}{3}.\frac{11}{50}a^2 = \frac{121}{500}a^3$.

Câu 2: Chọn C

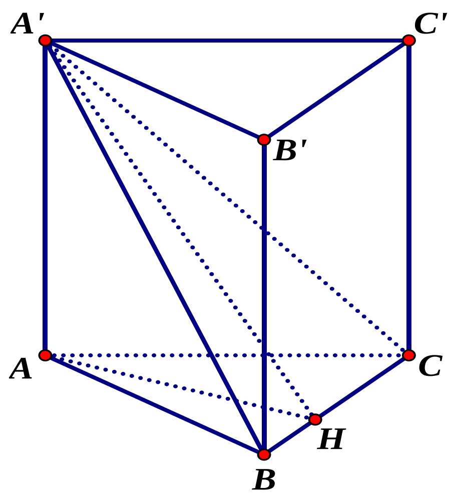


Gọi $O = AC \cap BD$; $I = SO \cap PM$; $Q = IN \cap SA$.

Đặt $a = \frac{SA}{SQ}$; $b = \frac{SB}{SM} = 2$; $c = \frac{SC}{SN} = \frac{3}{2}$; $d = \frac{SD}{SP} = \frac{4}{3}$. Ta có: $a + c = b + d \Rightarrow a = \frac{11}{6}$.

Ta có: $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.BCDA}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} = \frac{5}{22} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{22}{5}$. Vậy $V_{ABCD.QMNP} = V_{S.ABCD} - V_{S.MNPQ} = \frac{17}{5}$.

Câu 3: Chọn D



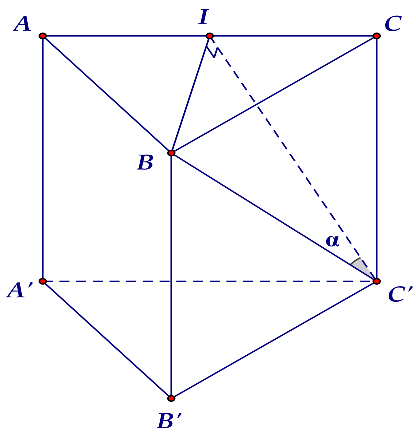
Gọi AH là đường cao của tam giác ABC, ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp A'H$ nên góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) là góc $AHA' = 30°$. Ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AA'}{AH} \Rightarrow AA' = AH.\tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2};$$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC = \frac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 4: Chọn C



Gọi I là trung điểm AC, suy ra $BI \perp AC$.
Mặt khác do $BI \perp CC'$ nên $BI \perp (ACC'A')$.

Do đó $\alpha = \left(BC', (ACC'A')\right) = (BC', IC') = BC'I$.

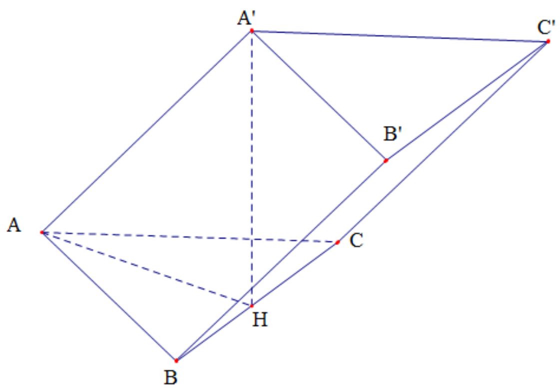
Ta có: $S_{\Delta ABC} = \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ và $BI = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = a$.

Theo đề bài: $\cot\alpha = 2 \Leftrightarrow \frac{C'I}{BI} = 2 \Leftrightarrow C'I = 2a$.

Suy ra $CC' = \sqrt{C'I^2 - CI^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V = S_{\Delta ABC}.CC' = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{33}}{3} = \frac{1}{3}a^3\sqrt{11}$.

Câu 5: Chọn C

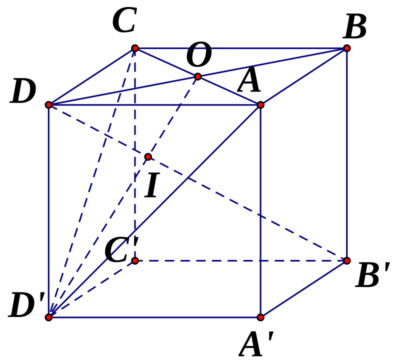


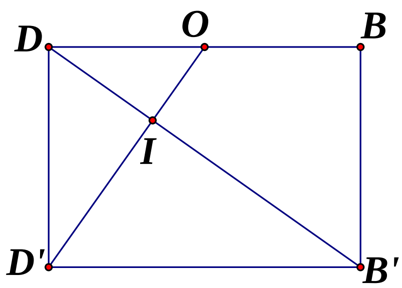
Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC), suy ra H là trung điểm của BC và tam giác $A'AH$ vuông tại H.

Ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. $\Rightarrow A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{9a^2}{4} - \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{8} = \dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$.

Câu 6: **Chọn A**





Gọi O là giao điểm của *AC* và *BD*, I là giao điểm của *DB'* và *D'O*. Vì *AC* vuông góc với *BD* và *CC'* nên $AC \perp (BDD'B')$.

Gọi x là độ dài cạnh hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, khi đó hình chữ nhật $BDD'B'$ có $BD = B'D' = x\sqrt{2}; DO = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}; OD' = \dfrac{x\sqrt{6}}{2}; BD' = x\sqrt{3}$

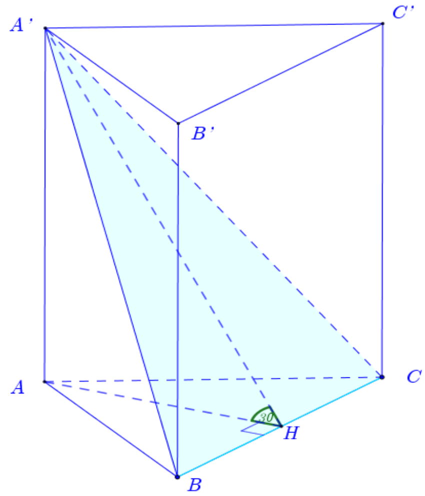
Vì $\dfrac{DO}{B'D'} = \dfrac{DI}{B'I} = \dfrac{OI}{D'I} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $DI = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}; OI = \dfrac{x\sqrt{6}}{6}$ do đó tam giác $\Delta DIO; \Delta D'IB'$ là các tam giác vuông.

Do $AC \perp (BDD'B')$ và $DB' \perp D'O$ nên

$$d\big(B',(ACD')\big) \times d\big(D,(ACD')\big) = B'I.DI = \frac{2}{3}x^2 = 6a^2 \text{ nên } x = 3a$$

Lại có thể tích của $ABCD.A'B'C'D'$ là ka^3 nên $ka^3 = 27a^3 \Leftrightarrow k = 27$

Câu 7: C**Chọn A**



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Suy ra $AH \perp BC$.

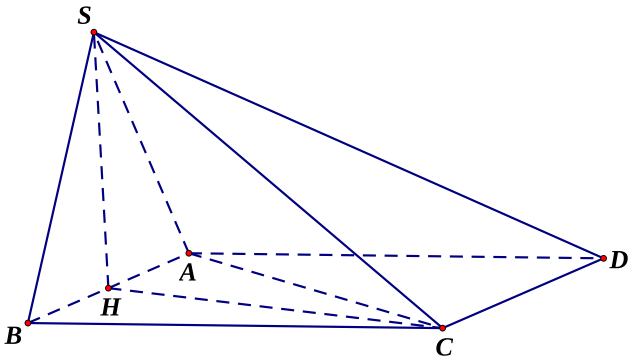
$A'H \perp BC$. Mà $(ABC) \cap (A'BC) = BC$

$\Rightarrow$ Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng góc $(AH; A'H) = AHA' = 30^\circ$.

Ta có: ABC là tam giác đều cạnh bằng a nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'A = AH.\tan 30^\circ = \dfrac{a}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = A'A.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 8: Chọn A



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Tam giác ABC đều nên $CH \perp AB$, mà $CD // AB \Rightarrow CH \perp CD$ (1).

Có $CD = (SCD) \cap (ABCD)$ (2)

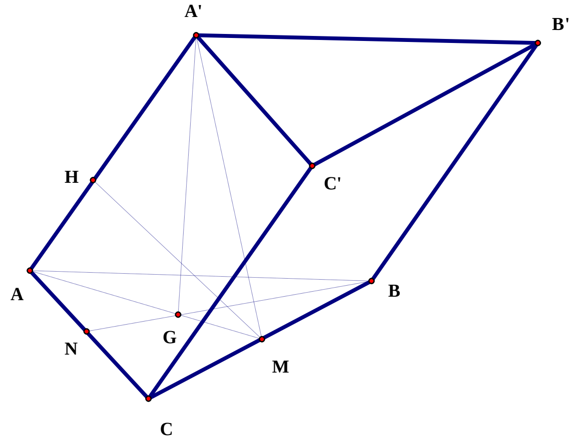
Có $\begin{cases} CD \perp CH \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp SC$ (3)

Từ đó suy ra $((SCD);(ABCD)) = (SC;CH) = SCH = 45^\circ$.

Trong tam giác SCH có $SH = HC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{4}$.

Câu 9: Chọn C



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Dễ thấy $AM \perp BC$, $A'G \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'AM)$.

Gọi H là hình chiếu của M lên AA'.

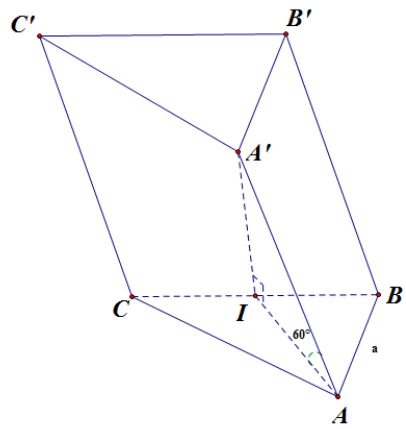
Từ đó suy ra khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $MH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

$AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'G = x$, $A'A = \sqrt{A'G^2 + AG^2} = \sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{3}}$.

Ta có $A'G.AM = HM.A'A \Rightarrow x.a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\dfrac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{3}} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{3}$.

Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = A'G.S_{ABC} = \dfrac{a}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 10: Chọn A



Ta có: $A'I \perp (ABC)$; AI là hình chiếu vuông góc của AA' lên mặt đáy ABC.

Do đó $(AA',(ABC)) = (AA',AI) = A'AI = 60°$.

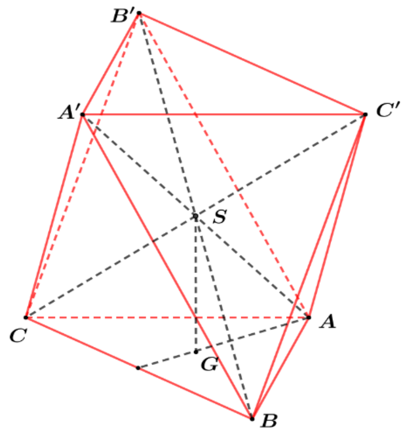
Tam giác ABC đều cạnh a nên $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông $A'AI$, ta có:

$A'I = AI.\tan A'AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\tan 60° = \dfrac{3a}{2}$.

Thể tích V của khối lăng trụ đã cho là: $V = A'I.S_{ABC} = \dfrac{3a}{2}.\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 11: Chọn B



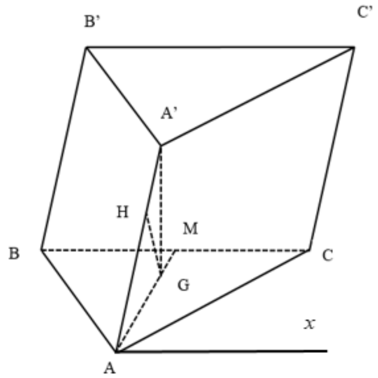
Ta có: $V=2V_{A'B'C'BC}=2.4V_{A'.SBC}=8V_{A.SBC}=8V_{S.ABC}$.

Gọi G là trọng tâm ΔABC. Ta có $(SA,(ABC))=(SA,AG)=SAG=60°$.

Xét ΔSAG vuông tại G. Ta có $\tan SAG=\dfrac{SG}{AG}\Rightarrow SG=AG.\tan SAG=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=a$.

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.SG.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}\Rightarrow V=8V_{S.ABC}=\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 12: Chọn A



Gọi M là trung điểm BC $\Rightarrow AM\perp BC, AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AG=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

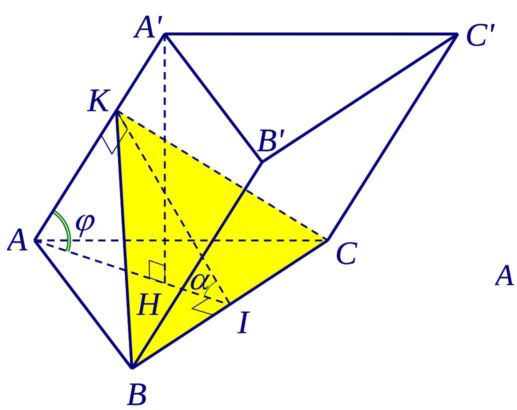
Kẻ $Ax//BC\Rightarrow BC//(A'Ax)$. Kẻ $GH\perp AA'\Rightarrow GH\perp(A'Ax)$.

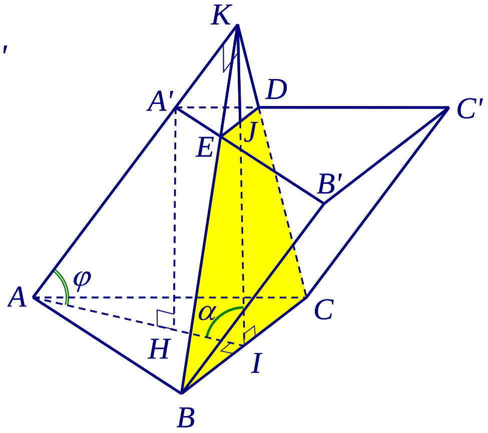
$\Rightarrow d(BC,AA')=d(BC,(AA'x))=d(M,(A'Ax))=\dfrac{3}{2}d(G,(A'Ax))$.

$\Rightarrow \dfrac{a\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3}{2}GH\Leftrightarrow GH=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Ta có $\dfrac{1}{GH^2}=\dfrac{1}{GA'^2}+\dfrac{1}{GA^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{GA'^2}=\dfrac{27}{3a^2}\Leftrightarrow GA'=\dfrac{a}{3}$.

$V_{ABC.A'B'C'}=A'G.S_{ABC}=\dfrac{a}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ $(đvtt)$

Câu 13: Chọn A





Gọi H là trọng tâm tam giác ABC, ta có $A'H \perp (ABC)$.

$AH \cap BC = I \Rightarrow I$ là trung điểm của BC và $AI \perp BC$.

Ta có $AI = AB.\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AI = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi K là hình chiếu của I trên đường thẳng AA'. Khi đó $AA' \perp (BCK)$. Hay $(P) \equiv (BCK)$.

Ta có hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là tam giác BCK.

Ta có hai khả năng về vị trí điểm K.

Khả năng 1: K nằm trong đoạn AA' thì thiết diện của (P) và lăng trụ là tam giác cân BCK.

Khả năng 2: K nằm ngoài đoạn AA' thì thiết diện của (P) và lăng trụ là hình thang cân $BCDE$

.

Trong cả hai khả năng trên ta đều có $S_{\text{thiÕt diÖn}} \le S_{BCK}$.

Gọi $\alpha = AIK$ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (ABC).

$$\text{Ta có } \cos\alpha = \frac{S_{BCK}}{S_{ABC}} \ge \frac{S_{\text{thiÕt diÖn}}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{3a^2}{8}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha \le 30^0 \Rightarrow \varphi = A'AI = 90° - \alpha \ge 60°$$

$$\Rightarrow \cos\varphi \le \frac{1}{2} \Rightarrow AA' = \frac{AH}{\cos\varphi} \ge 2AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \text{ và } AK = AI\cos\varphi \le \frac{AI}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

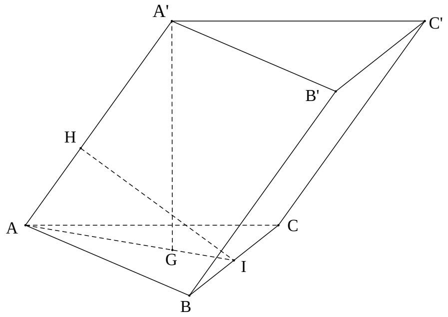
Do đó $AK < AA'$ hay K phải nằm giữa A và A'.

Ta có $S_{BCK} = \dfrac{1}{2}BC.KI = \dfrac{1}{2}a.KI = \dfrac{3a^2}{8} \Rightarrow KI = \dfrac{3a}{4}$. Suy ra $\sin A'AI = \dfrac{IK}{AI} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'AI = 60°$

$$\Rightarrow A'H = AH.\tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a.$$

Do đó thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = S_{ABC}.A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 14: Chọn A



Gọi G là trọng tâm ΔABC, I là trung điểm của cạnh BC và H là hình chiếu vuông góc của I trên AA'.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AI) \Rightarrow BC \perp IH$.

Mặt khác $IH \perp AA'$ nên IH là đoạn vuông góc chung của AA' và BC suy ra $IH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

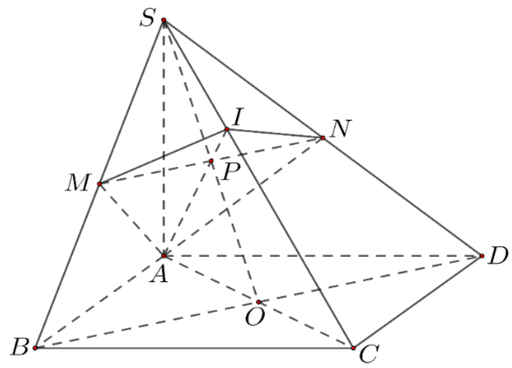
ΔABC đều cạnh a suy ra $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AG = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Diện tích ΔABC là $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

ΔAHI vuông tại H có $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $IH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$ suy ra $AH = \sqrt{AI^2 - IH^2} = \dfrac{3a}{4}$.

$\Delta GAA'$ đồng dạng với ΔHAI nên ta có: $\dfrac{GA'}{GA} = \dfrac{HI}{HA} \Leftrightarrow GA' = \dfrac{HI}{HA}.GA = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{4}}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{3}$.

Vậy thể tích của khối chóp $ABC.A'B'C'$ là $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 15: Chọn A



Trong mp(SBD), gọi P là giao điểm của MN và SO

Trong mp(SAC), gọi I là giao điểm của AP và SC.

Theo định lý mendeleus ta có:

$\dfrac{AC}{AO}.\dfrac{PO}{PS}.\dfrac{IS}{IC} = 1 \Rightarrow \dfrac{2}{1}.\dfrac{1}{1}.\dfrac{IS}{IC} = 1 \Rightarrow \dfrac{IS}{IC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{IS}{SC} = \dfrac{1}{3}$.

Ta có:

$\dfrac{V_{SMNI}}{V_{SBDC}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SI}{SC}.\dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12} \Rightarrow V_{SMNI} = \dfrac{1}{12}V_{SBCD} = \dfrac{1}{24}V_{SABCD}$.

$\dfrac{V_{SMNA}}{V_{SBDA}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SD}.\dfrac{SA}{SA} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{SMNA} = \dfrac{1}{4}V_{SBDA} = \dfrac{1}{8}V_{SABCD}$.

$\Rightarrow V_{SAMNI} = V_{SMNI} + V_{SMNA} = \dfrac{1}{6}V_{SABCD}. \Rightarrow V_{MNIABCD} = \dfrac{5}{6}V_{SABCD}$.

$V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow V_{ABCDMIN} = \dfrac{5}{6}V_{SABCD}. = \dfrac{5}{6}.\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^3 = \dfrac{5\sqrt{3}}{18}a^3$.

Câu 16: Chọn D

Ta có : $V_{OABC}=\dfrac{abc}{6}$, $S_{tp}=\dfrac{1}{2}\left(ab+bc+ac+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}\right)$.

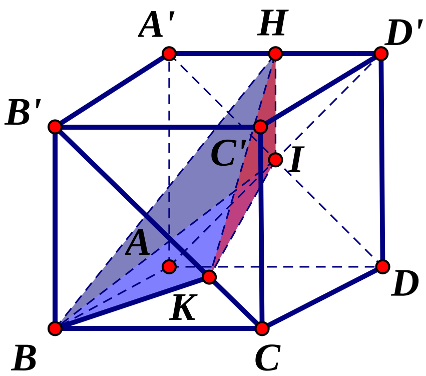
Gọi T là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$, ta có: $V_{OABC}=V_{TOAB}+V_{TOAC}+V_{TOBC}+V_{TABC}=\dfrac{1}{3}r(S_{OAB}+S_{OAC}+S_{OBC}+S_{ABC})=\dfrac{1}{3}r.S_{tp}$ (r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$)

$\Rightarrow r=\dfrac{3V_{OABC}}{S_{tp}}=\dfrac{abc}{ab+bc+ac+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}$

$\Rightarrow \dfrac{a}{r}=\dfrac{ab+bc+ac+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}}{bc}=\dfrac{a}{c}+1+\dfrac{a}{b}+\sqrt{\dfrac{a^2}{c^2}+1+\dfrac{a^2}{b^2}}$

$\geq 1+1+1+\sqrt{1+1+1}=3+\sqrt{3}$. Vậy $\left(\dfrac{a}{r}\right)_{\min}=3+\sqrt{3}\Leftrightarrow a=b=c$.

Câu 17: Chọn C



Gọi H là trung điểm của $A'D'\Rightarrow IH//AA'\Rightarrow IH\perp\left(A'B'C'D'\right)$ và $IH=\dfrac{AA'}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi K là hình chiếu của B lên $CB'\Rightarrow BK\perp CB'$, mà $BK\perp A'B'$ nên $BK\perp\left(CA'B'\right)$.

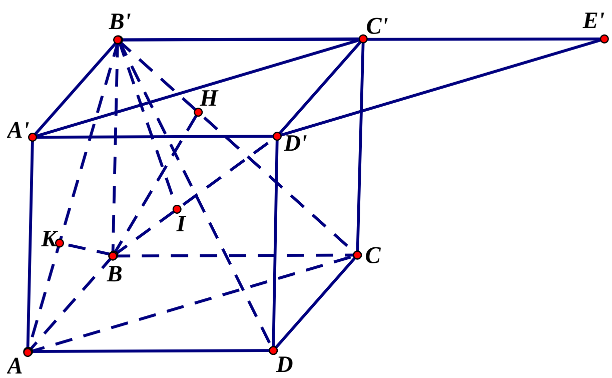
$\Delta BB'C$ có $BK=\sqrt{\dfrac{B'B^2.BC^2}{B'B^2+BC^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$d\left(IH,BK\right)=d\left(IH,\left(BB'C'C\right)\right)=d\left(AA',\left(BB'C'C\right)\right)=d\left(A,\left(BB'C'C\right)\right)=AB=a.$

Gọi α là góc giữa IH và BK, mà $IH//BB'$ nên $\alpha=B'BK$.

Khi đó $\cos\alpha=\dfrac{BK}{BB'}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ta có $V_{IHBK}=\dfrac{1}{6}IH.BK.d\left(IH,BK\right).\sin\alpha=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 18: Chọn D



Gọi độ dài các cạnh của hình hộp chữ nhật lần lượt là: $AB = x; AD = y; AA' = z$

Ta có: $d\left(AB, B'C\right) = d\left(AB, \left(B'CD\right)\right) = BH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ (H là hình chiếu của B lên $B'C$).

Xét tam giác BCB' ta có: $\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{BH^2} = \frac{5}{4a^2}$ (1).

Ta có: $d\left(BC; AB'\right) = d\left(BC; \left(ADB'\right)\right) = BK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ (K là hình chiếu của B lên AB').

Xét tam giác ABB' ta có: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{BK^2} = \frac{5}{4a^2}$ (2).

Dựng đường thẳng d đi qua D' và song song với $A'C'$. Kéo dài $B'C'$ cắt d tại E'.

Ta có: $d\left(AC; BD'\right) = d\left(AC; \left(BD'E'\right)\right) = d\left(C; \left(BD'E'\right)\right) = d\left(C'; \left(BD'E'\right)\right) = \frac{1}{2} d\left(B'; \left(BD'E'\right)\right)$.

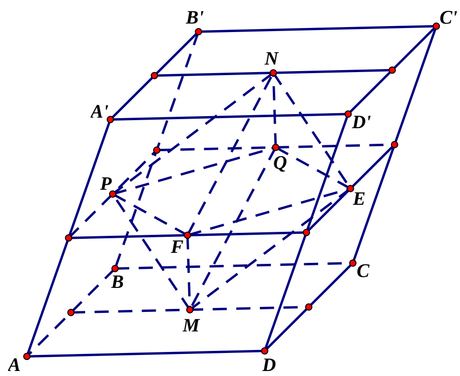
Từ (1) và (2) $\Rightarrow x = y$ $\Rightarrow$ $A'B'C'D'$ là hình vuông.

$\Rightarrow E'D' \perp B'D' \Rightarrow d\left(B'; \left(BD'E'\right)\right) = B'I = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ (I là hình chiếu của B' lên BD').

Xét tam giác $BB'D'$ ta có: $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{\left(x\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{B'I^2} = \frac{3}{4a^2}$ (3).

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \begin{cases} x = a \Rightarrow y = a \\ z = 2a \end{cases}$. Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = a.a.2a = 2a^3$.

Câu 19: Chọn C



Gọi V_1 là thể tích khối đa diện có các đỉnh M, P, Q, E, F, N.

Gọi S, h lần lượt là diện tích đáy và chiều cao của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Ta có

$$S_{PQEF} = \frac{1}{2} PE.QF.\sin(PE, QF) = \frac{1}{2} AB.BC.\sin(AB, BC) = \frac{S}{2}.$$

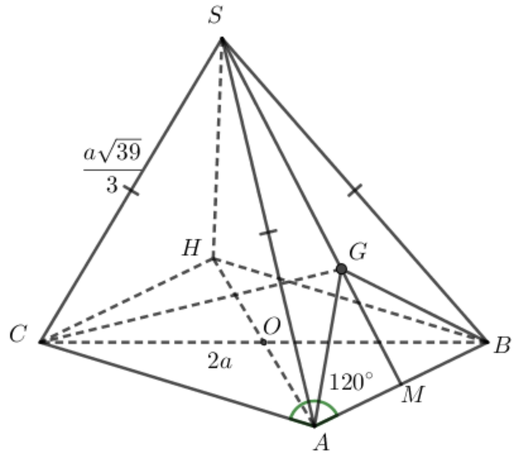
Suy ra $V_1 = \frac{1}{3} S_{PQEF} \left(d(M, (PQEF) + d(N, (PQEF))\right) = \frac{1}{3}\frac{S}{2} h = \frac{V}{6}$.

Phân tích:

+ Kiến thức trọng tâm của bài toán là công thức tính thể tích hình lăng trụ, hình chóp, diện tích hình bình hành và khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

+ Sử dụng quan hệ song song để tính tỷ số khoảng cách, tỷ số diện tích.

Câu 20: Chọn D



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt đáy, vì $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$ hay H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$\Rightarrow HA = HB = HC = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Gọi O là trung điểm BC, tam giác ABC cân tại A

nên $\begin{cases} AO \perp BC \\ BAO = CAO = 60° \end{cases}$

Suy ra $AB = AC = \dfrac{BO}{\sin BAO} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB.AC.\sin 120° = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$

Đường cao của khối chóp là $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{39a^2}{9} - \dfrac{12a^2}{9}} = a\sqrt{3}$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3}{3}$

Do G là trọng tâm tam giác SAB nên $GM = \dfrac{1}{3}SM \Rightarrow \mathrm{d}\left(G,\left(ABC\right)\right) = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}\left(S,\left(ABC\right)\right)$

$\Rightarrow V_{G.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{9}$.

Cách 2:

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt đáy $\left(ABC\right)$, vì $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$.

Gọi O là trung điểm $BC \Rightarrow HO \perp BC$

Tam giác ABC cân tại A nên $\begin{cases} AO \perp BC \\ BAO = CAO = 60° \end{cases}$.

Vậy H nằm trên đường thẳng AO và ΔHAB đều.

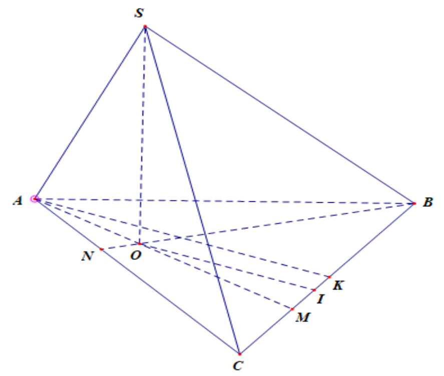
Ta có $BO = \dfrac{AH.\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{2BO}{\sqrt{3}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = AB$.

Đường cao của khối chóp là $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{39a^2}{9} - \dfrac{12a^2}{9}} = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB.AC.\sin 120° = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3}{3} \Rightarrow V_{G.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABC} = \dfrac{a^3}{9}$.

Câu 21: Chọn B



Gọi O là chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC).

Đặt $d(O,BC)=a$, $d(O,AC)=b$, $d(O,AB)=c$, $SO=h$.

Ta có $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OAC}+S_{\Delta OAB}\Rightarrow a+b+c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1)$.

Mặt khác $\dfrac{d(O,(SBC))}{d(A,(SBC))}=\dfrac{OM}{AM}=\dfrac{OI}{AK}=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\Rightarrow d(O,(SBC))=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{6}}{4}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $\dfrac{2}{a^2}=\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{a^2}\Rightarrow a=h$.

Tương tự $\dfrac{d(O,(SAC))}{d(B,(SAC))}=\dfrac{d(O,AC)}{d(B,AC)}=\dfrac{2b}{\sqrt{3}}\Rightarrow d(O,(SAC))=\dfrac{2b}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{15}}{10}=\dfrac{b}{\sqrt{5}}$.

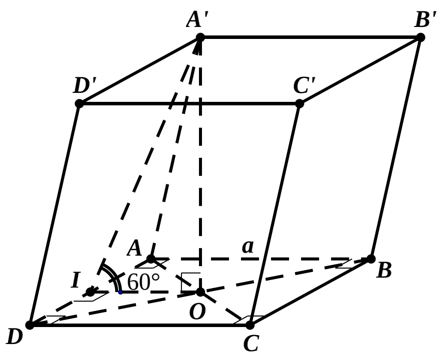
Suy ra $\dfrac{5}{b^2}=\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{b^2}\Rightarrow b=2h$.

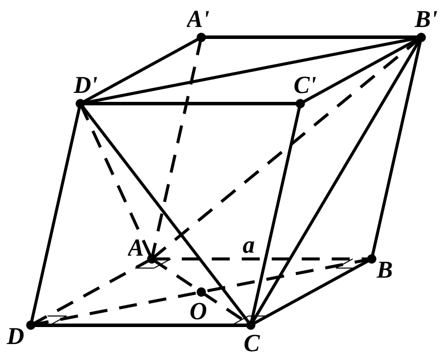
Tương tự $\dfrac{d(O,(SAB))}{d(\mathrm{C},(SAB))}=\dfrac{d(O,AB)}{d(C,AB)}=\dfrac{2c}{\sqrt{3}}\Rightarrow d(O,(SAC))=\dfrac{2c}{\sqrt{3}}.\dfrac{\sqrt{30}}{20}=\dfrac{c}{\sqrt{10}}$.

Suy ra $\dfrac{10}{c^2}=\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{1}{c^2}\Rightarrow c=3h$.

$(1)\Rightarrow h+2h+3h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow h=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}.SO.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{48}$.

Câu 22: Chọn A





Gọi $O=AC\cap BD$ và I là trung điểm của AD.

Ta có $(ADD'A')\cap(ABCD)=AD$, $OI\perp AD$ và $A'O\perp(ABCD)$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ là $A'IO=60°$.

Tam giác $A'IO$ vuông tại O nên $A'O=IO\tan A'IO=\dfrac{a}{2}\cdot\tan 60°=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

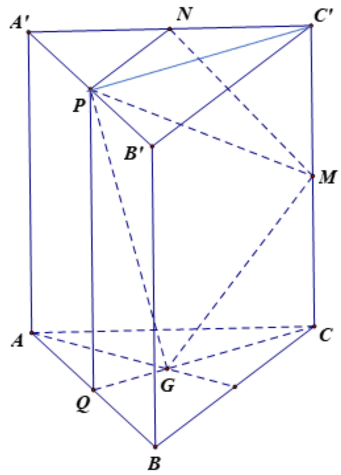
Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V=AB.AD.A'O=a.a\sqrt{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3a^3}{2}$.

Dễ thấy $V_{CC'B'D'} = V_{B'ABC} = V_{AA'B'D'} = V_{D'ACD} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DC\cdot A'O = \frac{1}{6}\cdot a\sqrt{3}\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$.

Vậy thể tích khối tứ diện $ACB'D'$ là

$$V_{ACB'D'} = V - V_{CC'B'D'} - V_{B'ABC} - V_{AA'B'D'} - V_{D'ACD} = V - 4V_{D'ACD} = \frac{3a^3}{2} - 4\cdot\frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{2}.$$

Câu 23: Chọn A



Gọi Q là trung điểm của AB.

Đặt $S = S_{PQCC'}$; $h = d\left(A',\left(PQCC'\right)\right)$.

Theo giả thiết $V_{N.GMP} = \frac{1}{3}S_{GMP}.d\left(N,\left(GMP\right)\right) = 5$

$\Rightarrow S_{GMP}.d\left(N,\left(GMP\right)\right) = 15$.

Ta có

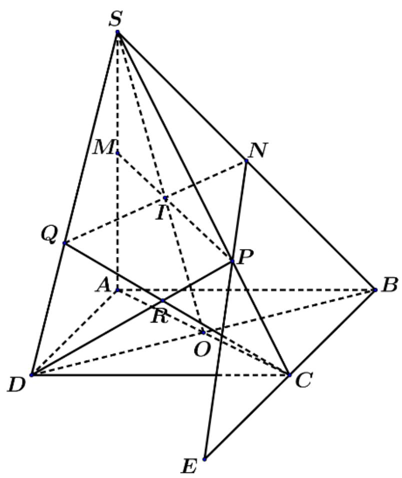
$$S_{MPG} = S_{PQCC'} - S_{PQG} - S_{PMC'} - S_{MGC} = S - \frac{S}{6} - \frac{S}{4} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}S = \frac{5S}{12}.$$

Lại có $d\left(N,\left(GMP\right)\right) = \frac{1}{2}d\left(A',\left(GMP\right)\right)$.

Suy ra: $S_{GMP}.d\left(N,\left(GMP\right)\right) = \frac{5S}{12}.\frac{h}{2} \Rightarrow S.h = 72$.

Mặt khác, vì $V_{A'.PQCC'} = \frac{2}{3}.\frac{V_{ABC.A'B'C'}}{2}$ nên $V_{ABC.A'B'C'} = S.h = 72$.

Câu 24: Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD, I = MP \cap SO \Rightarrow Q = NI \cap SD$

ÁP dụng định lí Menelauyt cho tam giác SBC với cát tuyết $\overline{NPE}$, ta được $\frac{NB}{NS}.\frac{PS}{PC}.\frac{EC}{EB} = 1$

$\Rightarrow CE = CB$

Do $\overline{MIP}$ nên $\overrightarrow{SI} = x\overrightarrow{SP} + (1-x)\overrightarrow{SM} = x\frac{2}{3}\overrightarrow{SC} + (1-x)\frac{4}{9}\overrightarrow{SA}$

$\overrightarrow{SI} = k\overrightarrow{SO} = k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SA}\right) \Rightarrow x = \frac{3}{5}, k = \frac{8}{15}$. Tương tự với ba điểm thẳng hàng N, I, Q ta có

$\overrightarrow{SQ} = \frac{4}{7}\overrightarrow{SD}$

Áp dụng định lí Menelauyt cho tam giác SCQ với cát tuyến $\overline{PRD}$, ta được $\frac{RQ}{RC}=\frac{6}{7}$ (3)

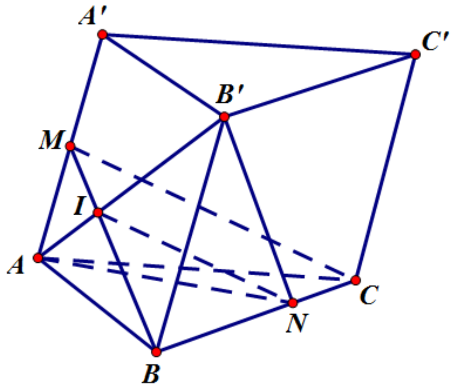
Từ đó ta có $S_{PRQ}=\frac{6}{13}S_{PQC}=\frac{6}{13}.\frac{1}{3}S_{SQC}=\frac{2}{13}.\frac{4}{7}.S_{SDC}=\frac{8}{91}S_{SDC}$

$\Rightarrow V_{EPQR}=\frac{8}{91}V_{ESDC}=\frac{8}{91}V_{SBDC}=\frac{4}{91}V_{SABCD}\Rightarrow V_{SABCD}=\frac{18.91}{4}$

Do đó $V_{SMNPQ}=V_{SMNP}+V_{SMPQ}=\left(\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}+\frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SC}.\frac{SQ}{SD}\right)\frac{V_{SABCD}}{2}$

$=\left(\frac{4}{9}.\frac{2}{3}.\frac{1}{2}+\frac{2}{3}.\frac{4}{9}.\frac{4}{7}\right).\frac{V_{SABCD}}{2}=65\text{cm}^3$

Câu 25: Chọn A



Gọi $I=BM\cap AB';IN//CM(N\in BC)$. Khi đó: $CM//(AB'N)$

$\Rightarrow d(CM,A'B)=d(C,(AB'N))=\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Mặt khác: $\frac{IM}{IB}=\frac{AM}{BB'}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{NC}{NB}=\frac{IM}{IB}=\frac{1}{2}\Rightarrow d(B,(AB'N))=2d(C,(AB'N))=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

Ta có: $\cos ABN=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}$. Đặt $BB'=x$, áp dụng công thức thể tích khối chóp tam giác khi biết ba cạnh chung đỉnh và ba góc tại đỉnh đó. Ta được:

$$V_{B.AB'N}=\frac{1}{6}.1.\frac{4}{3}.x.\sqrt{1+2.\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{2}.0-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-0^2}=\frac{x\sqrt{2}}{9}.$$

Ta có:

$$AB'=\sqrt{x^2+x+1},BN=\frac{4}{3}\Rightarrow NB'=\sqrt{x^2+\frac{16}{9}},AN=\sqrt{AB^2+BN^2-2AB.BN.\cos ABN}=\frac{\sqrt{13}}{3}.$$

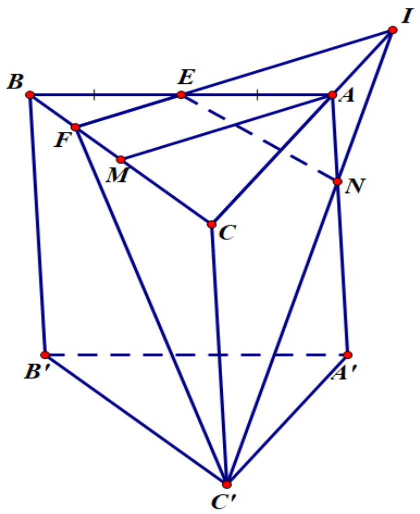
$$\cos B'AN=\frac{x^2+x+1+\frac{13}{9}-\left(x^2+\frac{16}{9}\right)}{\frac{2\sqrt{13(x^2+x+1)}}{3}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{13(x^2+x+1)}}\Rightarrow\sin B'AN=\sqrt{1-\frac{(3x+2)^2}{52(x^2+x+1)}}.$$

$$S_{AB'N}=\frac{\sqrt{13(x^2+x+1)}}{6}\sqrt{1-\frac{(3x+2)^2}{52(x^2+x+1)}}=\sqrt{\frac{43x^2+40x+48}{12}}.$$

Do đó: $d(B,(ANB')) = \dfrac{3V_{B.ANB'}}{S_{ANB'}} = \dfrac{\dfrac{x\sqrt{2}}{3}}{\dfrac{\sqrt{43x^2+40x+48}}{12}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7} \Leftrightarrow x = 4 (x>0).$

Vậy $V_{B.ANB'} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ và $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{B'.ABC} = 3\left(\dfrac{3}{2}V_{B.ANB'}\right) = \dfrac{9}{2}.\dfrac{4\sqrt{2}}{9} = 2\sqrt{2}$.

Câu 26: Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC, vì ΔABC cân tại A nên $AM \perp BC$. Lại có $EF \perp BC \Rightarrow EF // AM$.

ΔABC có E là trung điểm của AB, $EF // AM \Rightarrow F$ là trung điểm của $BM \Rightarrow EF$ là đường trung bình của ΔBAM.

Kéo dài FE cắt tia CA tại I. Nối $C'I$ cắt $A'A$ tại N. Khi đó $(C'EF)$ cắt lăng trụ theo thiết diện là tứ giác $EFC'N$.

Gọi thể tích khối đa diện chứa đỉnh A là V_1.

Ta có: $AM // FI \Rightarrow \dfrac{AM}{FI} = \dfrac{CM}{CF} = \dfrac{2}{3}$, mà $AM = 2EF \Rightarrow \dfrac{EF}{FI} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{IE}{IF} = \dfrac{2}{3}$.

Lại có: $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{FM}{FC} = \dfrac{1}{3}$; $\dfrac{IN}{IC'} = \dfrac{IA}{IC}$ nên $\dfrac{IN}{IC'} = \dfrac{1}{3}$.

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{V_{I.EAN}}{V_{I.FCC'}} = \dfrac{IE}{IF}.\dfrac{IA}{IC}.\dfrac{IN}{IC'} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{27}$.

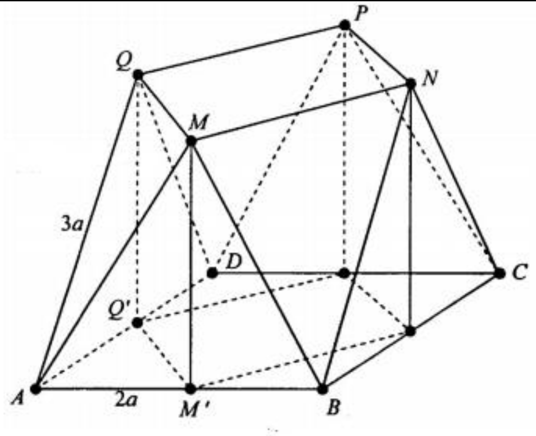
Do đó $\dfrac{V_1}{V_{I.FCC'}} = 1 - \dfrac{2}{27} = \dfrac{25}{27}$. Dễ thấy $\dfrac{IC}{AC} = \dfrac{3}{2}$ và $\dfrac{S_{FCC'}}{S_{BCC'B'}} = \dfrac{3}{8}$, do đó

$$\frac{V_{I.FCC'}}{V_{A.BCC'B'}} = \frac{\frac{1}{3}d\left(I,\left(FCC'\right)\right).S_{FCC'}}{\frac{1}{3}d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right).S_{BCC'B'}} = \frac{IC}{AC}.\frac{S_{FCC'}}{S_{BCC'B'}} = \frac{3}{2}.\frac{3}{8} = \frac{9}{16}.$$

Lại có $\dfrac{V_{A.BCC'B'}}{V} = 1 - \dfrac{V_{A.A'B'C'}}{V} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Từ (4), (5) và (6), ta suy ra $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{25}{27}.\dfrac{9}{16}.\dfrac{2}{3} = \dfrac{25}{72}$. $\Rightarrow V_1 = \dfrac{25}{72}V$.

Câu 27: Chọn B



Ta có $MM' = \sqrt{(3a)^2 - (2a)^2} = a\sqrt{5}$.

Chia khối đa diện đã cho thành khối lăng trụ đều có đáy là $MNPQ$ và chiều cao là MM' và 4 khối chóp tứ giác có đáy là hình chữ nhật dạng như $A.MQQ'M'$.

Ta có $MN = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{4a\sqrt{2}}{2} = 2a\sqrt{2}; d\left(A,\left(MQQ'M'\right)\right) = \dfrac{AC}{4} = a\sqrt{2}$.

Suy ta thể tích khối lăng trụ $V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = \left(2a\sqrt{2}\right)^2 .a\sqrt{5} = 8a^3\sqrt{5}$.

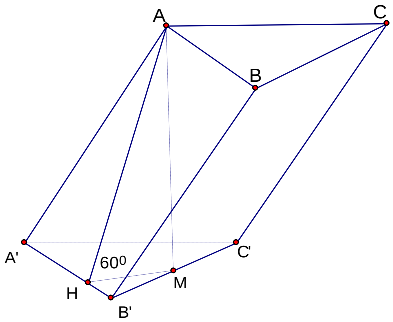
Thể tích khối chóp tứ giác $A.MQQ'M'$ là:

$$V_{A.MQQ'M'} = \frac{1}{3}S_{MQQ'M'}.\mathrm{d}\left(A,\left(MQQ'M'\right)\right) = \frac{1}{3}.\left(2a\sqrt{2}.a\sqrt{5}\right).a\sqrt{2} = \frac{4a^3\sqrt{5}}{3}$$

Suy ta thể tích khối đa diện đã cho là:

$$V_{(H)} = V_{MNPQ.M'N'P'Q'} + 4V_{A.MQQ'M'} = 8a^3\sqrt{5} + 4.\frac{4a^3\sqrt{5}}{3} = \frac{40a^3\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 28: Chọn B



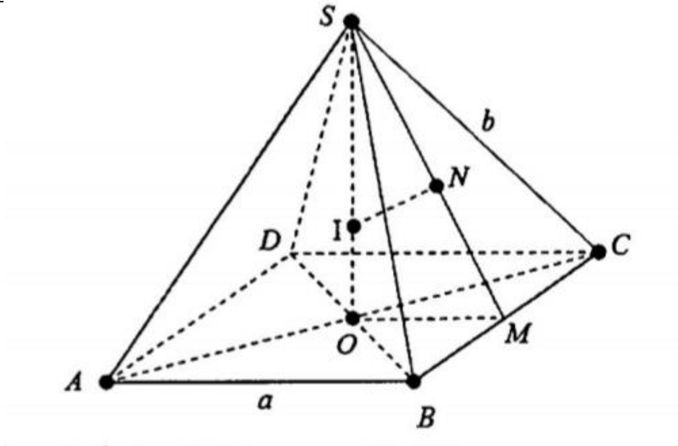
Hạ HM vuông góc với $A'B'$ tại điểm H. Khi đó góc nhị diện giữa hai mặt phẳng $(AA'B')$ và (ABC) cũng chính là góc giữa 2 mặt phẳng $(AA'B')$ và $(A'B'C')$ và bằng $AHM = 60^0$.

Xét tam giác vuông $HB'M$ vuông tại H có $HM = \dfrac{a}{2}.\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét tam giác vuông AMH vuông tại M có $AM = HM.\tan 60° = \dfrac{3a}{4}$.

Thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AM = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{3a}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{16}$

Câu 29: Chọn B



Chiều cao hình chóp $SO = h = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

$SM = \sqrt{SC^2 - MC^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Cách 1: Gọi tâm mặt cầu nội tiếp là I , khi đó ta có $IO = IN = r$.

Từ hình vẽ ta có $IN \perp (SBC)$, $\Delta SIN \backsim \Delta SOM$

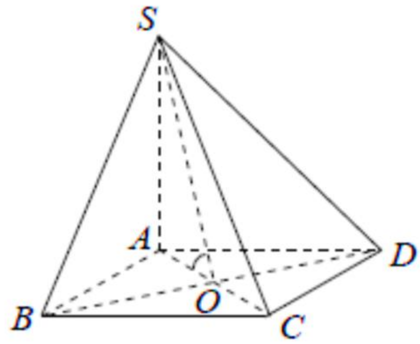
$$\Rightarrow \frac{SI}{SM} = \frac{IN}{OM} \Leftrightarrow \frac{h-r}{\frac{a\sqrt{15}}{2}} = \frac{r}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow \frac{\frac{a\sqrt{14}}{2} - r}{\frac{a\sqrt{15}}{2}} = \frac{2r}{a} \Leftrightarrow r = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}+\sqrt{2}}.$$

Cách 2 Thể tích khói chóp $V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{14}}{2} = \frac{a^3\sqrt{14}}{6}$.

Diện tích mặt bên $S_{SBC} = \frac{1}{2}BC.SM = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

Áp dụng công thức $r = \frac{3V}{S_{tp}.S_{ABCD}} = \frac{3V}{4S_{SBC} + S_{ABCD}} = \frac{3.\frac{a^3\sqrt{14}}{6}}{4.\frac{a^2\sqrt{15}}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}+\sqrt{2}}$.

Câu 30: Chọn D

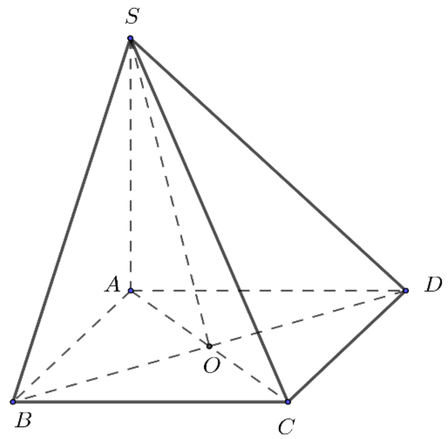


Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có: $((SBD),(ABCD)) = SOA = 60^\circ$.

Xét tam giác SOA vuông tại A : $h = SA = AO.\tan SOA = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

$$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{2}.S_{ABCD}.SA=\frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

Câu 31: Chọn D



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Dễ dàng thấy được góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc SOA suy ra $SOA=60°$.

Xét tam giác ΔSOA vuông tại A có $h=SA=AO.\tan SOA=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\tan 60°=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Do đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}a^3}{6}$.

Câu 32: Chọn C

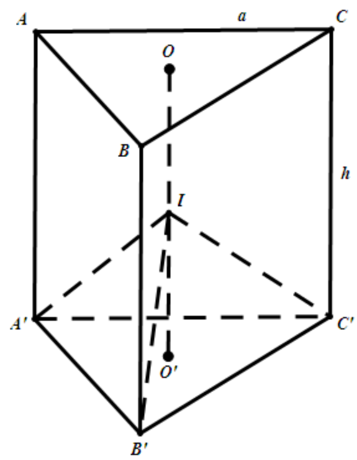
Thể tích khối lăng trụ: $V=S_{\Delta ABC}.h=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.h=\frac{a^3\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow h=AA'=\frac{2a\sqrt{15}}{3}$.

Bán kính đáy lăng trụ $R_d=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

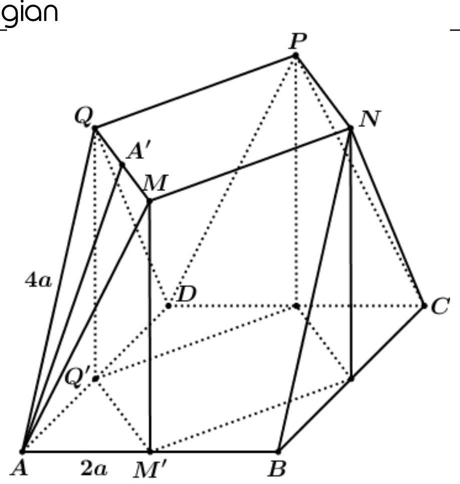
Áp dụng công thức tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ:

$$R=\sqrt{R_d^2+\frac{h^2}{4}}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\frac{\left(\frac{2a\sqrt{15}}{3}\right)^2}{4}}=a\sqrt{2}.$$



Câu 33: Chọn C

Hình vẽ minh họa



Ta dễ dàng tính được: $MM' = \sqrt{(4a)^2 - (2a)^2} = 2a\sqrt{3}$.

Các cạnh hình vuông $MNPQ$ là: $MN = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{4a\sqrt{2}}{2} = 2a\sqrt{2}$.

Nếu ta gọi A' là trung điểm của MP thì ta có $AA' = \sqrt{AM^2 - (MA')^2} = \sqrt{(4a)^2 - (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{14}$

Suy ra diện tích toàn phần của khối đa diện (H) là:

$$S_{tp\_(H)} = S_{ABCD} + S_{MNPQ} + 4S_{\Delta AMQ} + 4.S_{\Delta MAB} = (4a)^2 + \left(2a\sqrt{2}\right)^2 + 4.\frac{1}{2}.2a\sqrt{2}.a\sqrt{14} + 4.\frac{1}{2}.4a.2a\sqrt{3}$$

$$= 24a^2 + 8a^2\sqrt{7} + 16a^2\sqrt{3}.$$

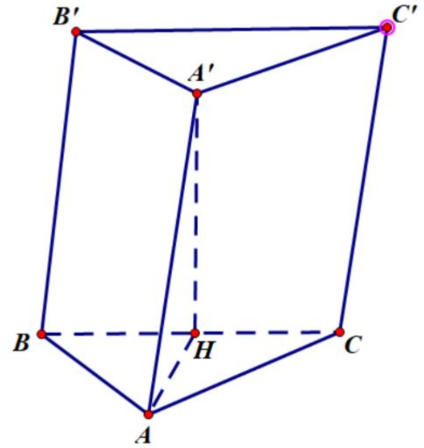
Câu 34: Chọn A

Gọi cạnh của hình lập phương và cạnh của tứ diện đều lần lượt là a, b.

Ta có: $\dfrac{S_{xq(H_1)}}{S_{tp(H_2)}} = \dfrac{4a^2}{4.\dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{3} \Rightarrow b^2 = \dfrac{4}{3}a^2 \Rightarrow b = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$

Suy ra: $\dfrac{V_{(H_1)}}{V_{(H_2)}} = \dfrac{a^3}{b^3.\dfrac{\sqrt{2}}{12}} = \dfrac{a^3}{\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^3.\dfrac{\sqrt{2}}{12}} = \dfrac{9\sqrt{6}}{4}$.

Câu 35: Chọn B



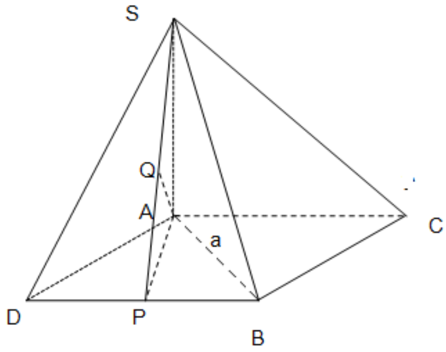
Do góc giữa cạnh bên với mặt đáy của lăng trụ là 30^o nên suy ra

$\angle A'AH = 30^0 \Rightarrow A'H = AH.\tan 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{2}$.

Suy ra thể tích lăng trụ của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 36: Chọn B



Tam giác SAB vuông tại A và có $SBA = 60° \Rightarrow SA = AB.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Dựng hình bình hành $ABCD$, suy ra:

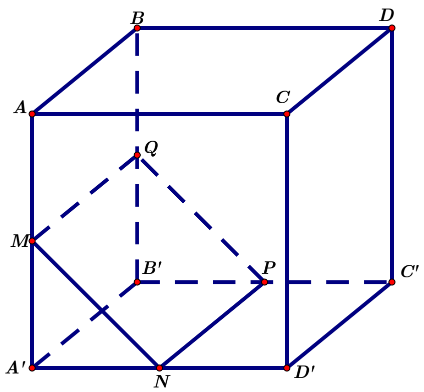
$$AC//(SBD) \Rightarrow d(AC;SB) = d(AC;(SBD)) = d(A;(SBD)) = AQ = \frac{SA.AP}{\sqrt{SA^2 + AP^2}}.$$

Trong đó $AP \perp BD; AQ \perp SB.$

Tam giác ABC đều suy ra: $AP = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow d(AC;SB) = AQ = \frac{SA.AP}{\sqrt{SA^2 + AP^2}} = \frac{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Câu 37: Chọn A



Giao điểm của mặt phẳng (MNP) với cạnh BB' là trung điểm Q của BB'.

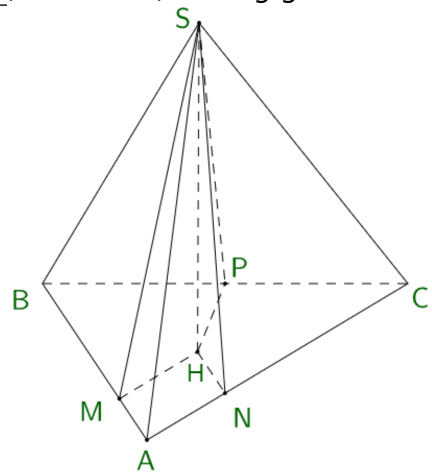
Khi đó thể tích V_1 là phần thể tích khối lăng trụ $A'MN.B'PQ$ như hình vẽ.

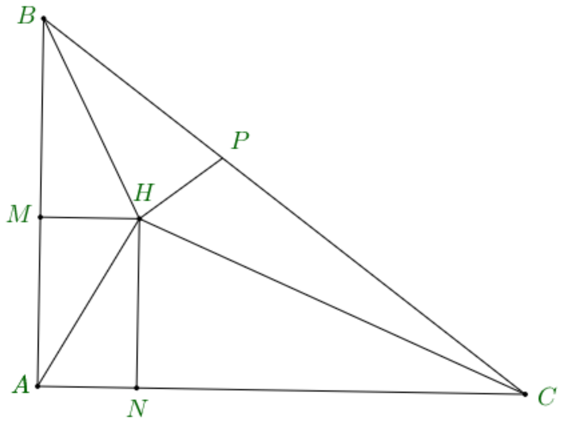
Ta có: $S_{\Delta A'MN} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta A'AD} \Rightarrow S_{\Delta A'MN} = \dfrac{1}{8}S_{\Delta A'ADD'} \Rightarrow V_{A'MN.B'PQ} = \dfrac{1}{8}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \dfrac{V}{8} = V_1$.

$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{7}$.

Câu 38: Chọn C

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) và M,N,P lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên các cạnh AB,AC,BC. Khi đó góc tạo bởi các mặt phẳng $(SAB),(SCA),(SBC)$ với (ABC) lần lượt là SMH,SNH,SPH. Suy ra $SMH = SPH = 60^o, SNH = 45^o$.



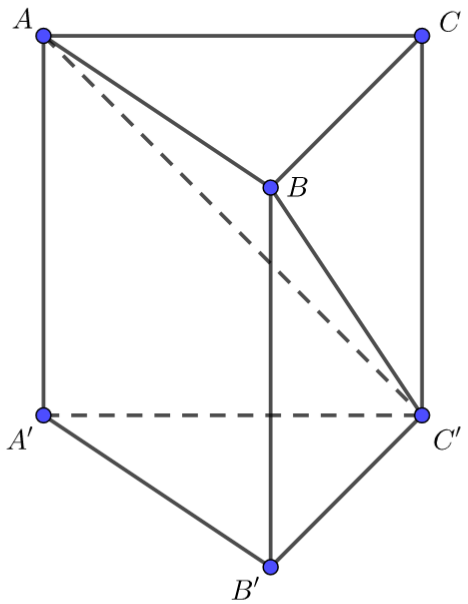


Đặt $SH = h \Rightarrow HM = HP = SH.\cot 60^o = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$; $HN = SH.\cot 45^o = h$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABH} + S_{\Delta ACH} + S_{\Delta CBH} \Leftrightarrow AB.AC = AB.MH + BC.HP + AC.HN$

$\Leftrightarrow 2a^2 = a\sqrt{2}.\dfrac{h}{\sqrt{3}} + 2a.\dfrac{h}{\sqrt{3}} + a\sqrt{2}.h \Rightarrow h = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}} \Rightarrow V_{SABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.h = \dfrac{2a^3}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}+3\sqrt{2}}$.

Câu 39: Chọn B



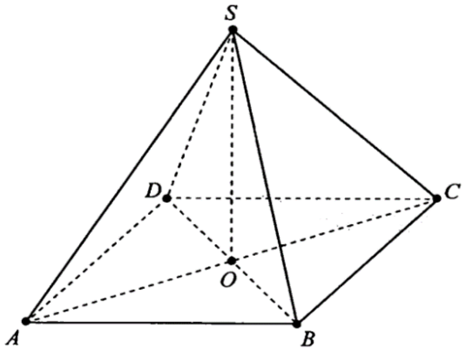
Ta có $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACC'A')$, mà $BC' \cap (ACC'A') = C'$ nên góc tạo bởi đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ là: $\left(BC', (ACC'A')\right) = \left(BC', AC'\right) = \widehat{AC'B} = 30^0$

Ta có: $AB = AC = 2a \Rightarrow AC' = AB.\cot 30^0 = 2a\sqrt{3}$

Suy ra đường cao lăng trụ là $h = CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{\left(2a\sqrt{3}\right)^2 - (2a)^2} = 2a\sqrt{2}$

Thể tích lăng trụ là $V = S_{\Delta ABC}.CC' = \dfrac{1}{2}.(2a)^2.2a\sqrt{2} = 4a^3\sqrt{2}$.

Câu 40: Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có ΔSAC vuông tại S nên $OS = OA = OB = OC = OD = R$. Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bán kính R.

Đặt $SC = x, x > 0$. Theo đầu bài, diện tích tam giác SAC là $2a^2$ nên:

$\frac{1}{2}SA.SC = 2a^2 \Leftrightarrow SA.SC = 4a^2 \Rightarrow SA = \frac{4a^2}{SC} = \frac{4a^2}{x}$.

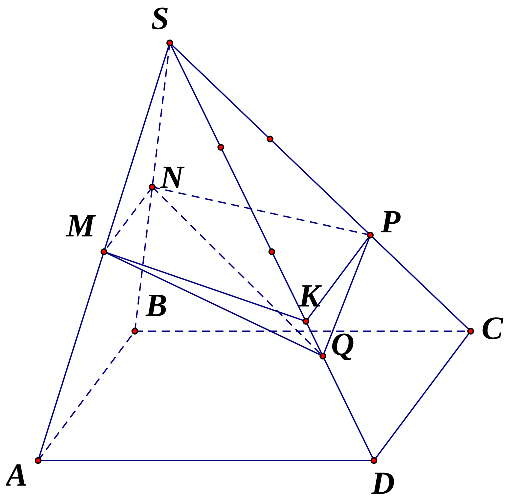
Suy ra $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{16a^4}{x^2} + x^2} \overset{AM-GM}{\geq} \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\frac{16a^4}{x^2}.x^2}} = a\sqrt{2}.$

Để diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là nhỏ nhất thì bán kính R nhỏ nhất

$\Rightarrow \min R = a\sqrt{2}$. Vậy diện tích nhỏ nhất của mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(a\sqrt{2}\right)^2 = 8\pi a^2$.

Câu 41: Chọn D

Dễ thấy



$V_{S.ABD} = V_{S.CBD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{1}{2}V$.

Có $\frac{V_{S.MNQ}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{4} = \frac{3}{16} \Rightarrow V_{S.MNQ} = \frac{3}{16}V_{S.ABD} = \frac{3}{32}V$.

$\frac{V_{S.PNQ}}{V_{S.CBD}} = \frac{SP}{SC}.\frac{SN}{SB}.\frac{SQ}{SD} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.PNQ} = \frac{1}{4}V_{S.CBD} = \frac{1}{8}V$.

Vậy $V_{SMNPQ} = V_{S.MNQ} + V_{S.PNQ} = \frac{3}{32}V + \frac{1}{8}V = \frac{7}{32}V$.

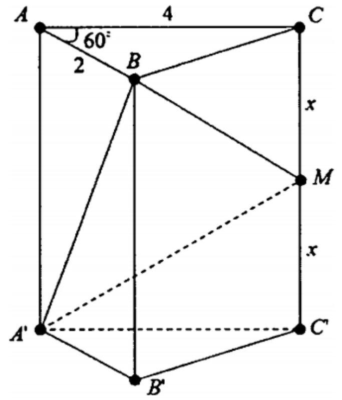
Câu 42: Chọn A

Gọi chiều cao của hình chóp là $h = SA$. Khi đó ta có

$$\frac{1}{\left[d\left(A;(SBD)\right)\right]^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}\Leftrightarrow\frac{1}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{a^2}\Rightarrow h=a$$

Vậy thể tích khối chóp $V_{SABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{1}{3}AB.AD.\mathrm{h}=\frac{1}{3}2a.a.a=\frac{2a^3}{3}$

Câu 43: Chọn A



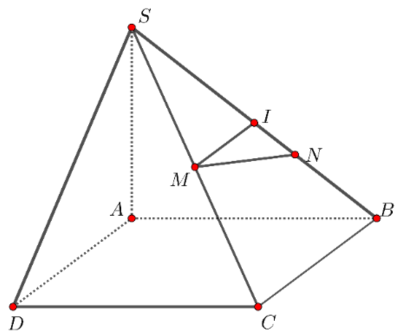
Đặt $AA'=2x,$ tam giác ABC có $AB=2,AC=4$ và $\angle BAC=60°\Rightarrow BC=2\sqrt{3}.$

Ta có: $\begin{cases}A'M=\sqrt{x^2+16}\\BM=\sqrt{x^2+12}\\A'B=\sqrt{4x^2+4}\end{cases}$

Tam giác BMA' vuông tại $M\Rightarrow x^2+16+x^2+12=4x^2+4\Rightarrow x=2\sqrt{3}\Rightarrow AA'=4\sqrt{3}.$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin60°=2\sqrt{3}$; $V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.AA'=24.$

Câu 44: Chọn C



Cách 1: Gọi I là trung điểm của SB

Xét ΔMNI vuông tại $I,$ ta có: $NI=\sqrt{MN^2-MI^2}=\sqrt{\frac{4a^2}{9}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{7}}{6}$

$IN=\frac{1}{6}SB\Rightarrow SB=a\sqrt{7}$

$SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=\sqrt{7a^2-a^2}=a\sqrt{6}$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V=\frac{1}{3}SA.AB^2=\frac{1}{3}a\sqrt{6}.a^2=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}.$

Cách 2: Gắn hệ trục tọa độ vào hình chóp với: A trùng với $O,$ trục Ox dọc theo $\overrightarrow{AD},$ trục Oy dọc theo $\overrightarrow{AB},$ trục Oz dọc theo $\overrightarrow{AS}.$

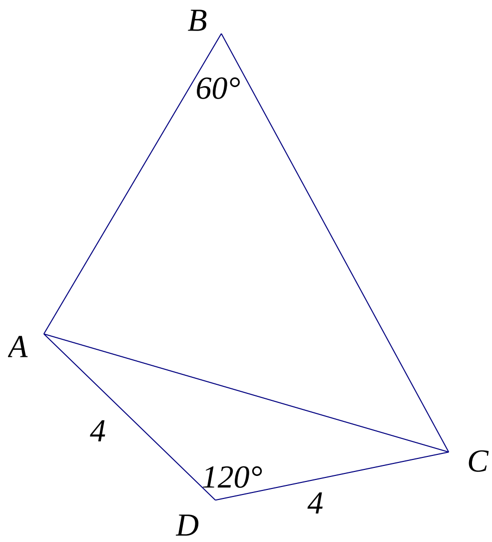
Ta gán các giá trị $a=1$. Khi đó, $A(0,0,0), B(0,1,0), C(1,1,0), D(1,0,0), S(0,0,h)$.

$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{h}{2}\right)$, $\overrightarrow{NS}+2\overrightarrow{NB}=\vec{0}\Rightarrow N\left(0,\frac{2}{3},\frac{h}{3}\right)$

$MN=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{h}{2}-\frac{h}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{h^2+10}}{6}=\frac{a}{2}=\frac{2a}{3}\Rightarrow h=\sqrt{6}$

Suy ra thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V=\frac{1}{3}S_{ABCD}.h=\frac{1}{3}.1^2.1.\sqrt{6}=\frac{1^3.\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

Câu 45: Chọn A



Vì lăng trụ đứng tồn tại mặt cầu ngoại tiếp nên bắt buộc đáy phải là tứ giác nội tiếp được đường tròn. Suy ra $ADC=180^0-ABC=120^0$

Trong ΔADC: $AC=\sqrt{DA^2+DC^2-2.DA.DC.cos120^0}=4\sqrt{3}$

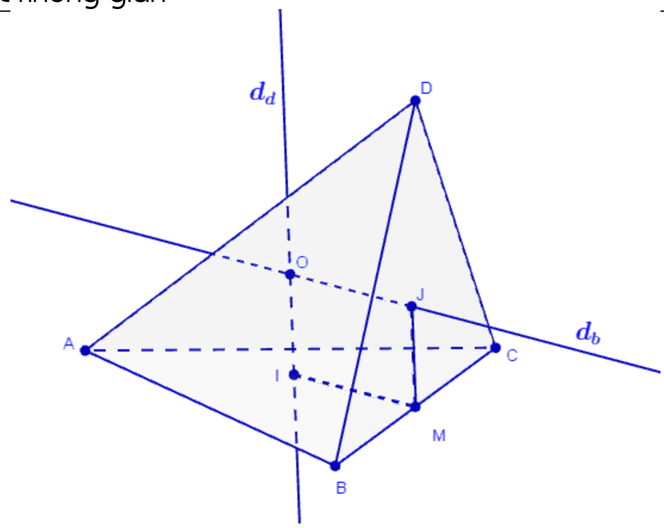
Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔADC (cũng là bán đường tròn ngoại tiếp tứ giác đáy $ABCD$) là: $R_{\Delta ADC}=\frac{AC}{2\sin120^0}=\frac{4\sqrt{3}}{2\sin120^0}=4$

Nếu chiều dài cạnh bên (cũng là chiều cao lăng trụ) là $h=AA'$ thì bán kính mặt cầu tiếp là:

$R=6=\sqrt{R^2_{\Delta ADC}+\frac{h^2}{4}}=\sqrt{4^2+\frac{h^2}{4}}\Rightarrow h=4\sqrt{5}$. Vậy thể tích tứ diện $A'ACD$ là:

$V_{A'ACD}=\frac{1}{3}S_{ACD}.AA'=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}DA.DC.\sin120^0\right).h=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}.4.4.\sin120^0\right).4\sqrt{5}=\frac{16\sqrt{15}}{3}$.

Câu 46: Chọn A



Gọi R_d, R_b lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và BCD.

Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và BCD.

$\Rightarrow R_d = IC, R_b = JC$.

Gọi d_d, d_b lần lượt là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và BCD.

Gọi O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ $\Rightarrow O = d_d \cap d_b$.

Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow MI, MJ$ là các đường trung trực của BC.

$\Rightarrow MIOJ$ là hình chữ nhật.

$$R = \sqrt{OJ^2 + CJ^2} = \sqrt{IM^2 + CJ^2} = \sqrt{IC^2 - MC^2 + CJ^2} = R = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \frac{GT^2}{4}}.$$

Đây là dạng hình chóp có hai mặt vuông góc với nhau. Khi đó công thức tính bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \frac{GT^2}{4}}$, trong đó GT là độ dài giao tuyến: $GT = BC = 6$.

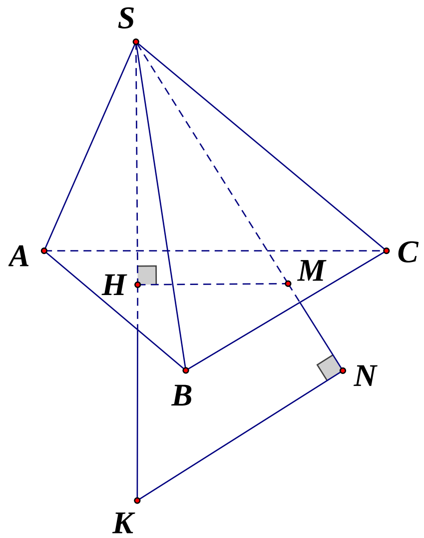
Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và DBC là $R_{\Delta ABC} = \frac{BC}{2\sin BAC}$; $R_{\Delta BDC} = \frac{BC}{2\sin BDC}$.

Từ giả thiết suy ra $R_{\Delta ABC} = \sqrt{3} R_{\Delta DBC} \Leftrightarrow \frac{BC}{2\sin BAC} = \sqrt{3}.\frac{BC}{2\sin BDC} \Rightarrow \sin BDC = \sqrt{3}\sin BAC$.

Lại có: $BAC + BDC = 90^0 \Rightarrow BDC = 60^0; BAC = 30^0$ $\Rightarrow R_{\Delta ABC} = 6, R_{\Delta BDC} = 2\sqrt{3}$.

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là: $R = \sqrt{6^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - \frac{6^2}{4}} = \sqrt{39}$.

Câu 47: Chọn B



Hạ đường cao SH vuông góc với (ABC) tại H (Vì $SABC$ cố định nên SH cố định), trên SH lấy điểm K sao cho $SH.SK = SM.SN = 3$. Suy ra điểm K cố định và được xác định bởi $SK = \frac{3}{SH}$.

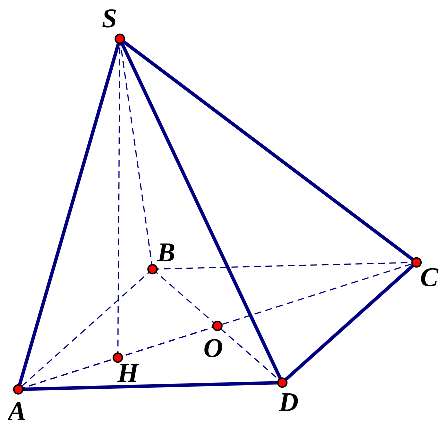
Suy ra $\Delta SHM \backsim \Delta SNK \Rightarrow SNK = 90°$. Suy ra N nhìn SK (cố định) một góc vuông. Vì thế M chạy trên mặt phẳng (ABC) thì N nằm trên mặt cầu cố định có đường kính là SK.

Suy ra $SK = 2R = 2\sqrt{3} \Rightarrow SH.SK = 2\sqrt{3}SH \Rightarrow SH = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}$.

Câu 48: Chọn A

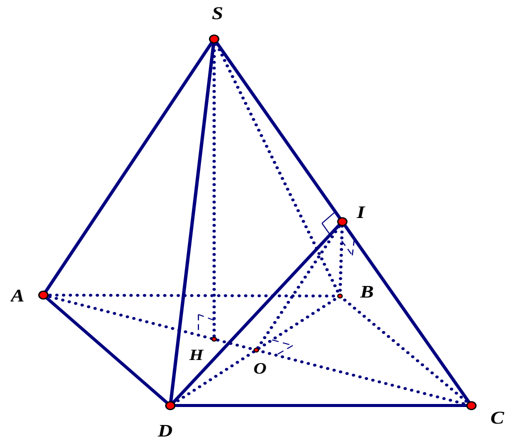


Tâm mặt cầu ngoại tiếp là điểm O cách đều các đỉnh: $OA = OB = OC = OD = OS = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Ta có $OH = \frac{OA}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Suy ra thể tích của hình chóp $SABCD$ là $V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 49: Chọn D



Cách 1:

Dễ thấy

$V_{S.ABD}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}=\dfrac{1}{6}SA.SB.SD\sqrt{1-\cos^2 ASB-\cos^2 ASD-\cos^2 BSD+2\cos ASB.\cos ASD.\cos BSD}$,

mặt khác $AB=AD=SA=SB=SD=a$ nên $S.ABD$ là tứ diện đều.

Suy ra $SO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}AC$, nên tam giác ΔSAC vuông tại S.

Mặt khác: Dựng $OI\perp SC$ trong mặt phẳng (SAC). Dễ dàng ta chứng minh được $SC\perp(BID)$.

Nên: $\begin{cases} OI=\dfrac{1}{2}SA=\dfrac{1}{2}BD & (1) \\ ((SBC);(SCD))=(BI;DI) & (2) \end{cases}$.

Từ $(1)\Rightarrow$ ΔBID $\perp$ tại I. Từ $(1);(2)$ suy ra $((SBC);(SDC))=(BI;DI)=90°$.

Cách 2:

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$. Ta có $\Delta SCB,\ \Delta SDC$ là các tam giác cân lần lượt tại B,D.

Gọi I là trung điểm của SC $\Rightarrow\begin{cases} BI\perp SC \\ DI\perp SC \end{cases}$.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng(SBC) và (SDC) là góc giữa hai đường thẳng BI và DI.

$\Delta SBC=\Delta SDC\Rightarrow BI=DI\Rightarrow\Delta IBD$ cân tại I.

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do $SA=SB=SD\Rightarrow HA=HB=HD\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ΔABD.

Mà ΔABD cân tại A nên H nằm trên đường chéo AC của hình thoi $ABCD$.

Đặt $OB=x$ $(0<x<a)$. Ta có $OA=\sqrt{a^2-x^2}$; $\sin OAB=\dfrac{OB}{AB}=\dfrac{x}{a}$.

$\sin BAD=\sin 2OAB=2\sin OAB.\cos OAB=2\dfrac{OB}{AB}.\dfrac{OA}{AB}=\dfrac{2x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}$.

Ta có $\dfrac{BD}{\sin BAD}=2AH\Rightarrow AH=\dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$.

Suy ra $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^4}{4(a^2-x^2)}}=\sqrt{\dfrac{3a^4-4a^2x^2}{4(a^2-x^2)}}=\dfrac{a}{2}\dfrac{\sqrt{3a^2-4x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Gọi V là thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Ta có $V=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}SH.AO.BD=\frac{a}{6}.\frac{\sqrt{3a^2-4x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}.\sqrt{a^2-x^2}.2x=\frac{a}{3}\sqrt{3a^2x^2-4x^4}$.

Theo giả thiết $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\Leftrightarrow\frac{a}{3}\sqrt{3a^2x^2-4x^4}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\Leftrightarrow\sqrt{3a^2x^2-4x^4}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

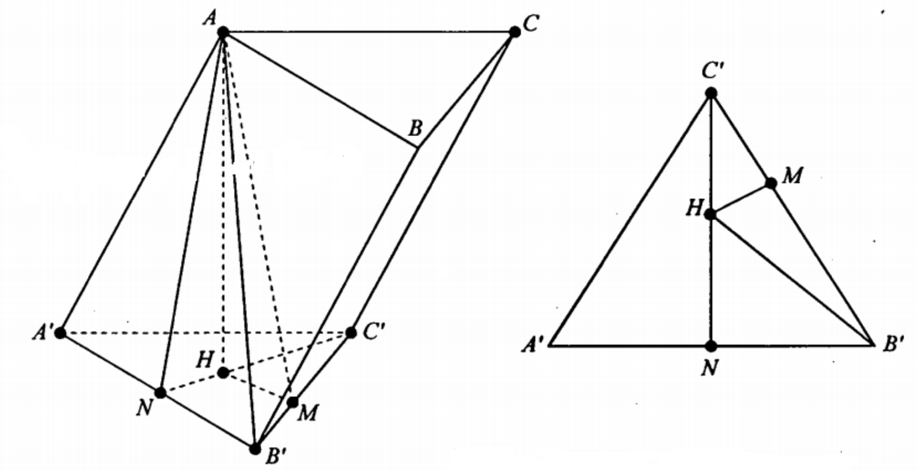
$$\Leftrightarrow 8x^4-6a^2x^2+a^4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\frac{a^2}{4}\\x^2=\frac{a^2}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{a}{2}\\x=\frac{a\sqrt{2}}{2}\end{array}\right..$$

Do tứ giác $ABCD$ không phải là hình vuông nên $x\neq\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $x=\frac{a}{2}$ hay $OB=\frac{a}{2}$.

Mà $OI=\frac{SA}{a}=\frac{a}{2}$. Suy ra ΔBIO vuông cân tại O $\Rightarrow BIO=45^\circ$ $\Rightarrow$ $BID=90^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là 90°.

Câu 50: Chọn D



Gọi N là trung điểm $A'B'$ $\Rightarrow AN\perp A'B'$.

Gọi H là chân đường cao hạ từ A xuống mặt phẳng $(A'B'C')$ $\Rightarrow HN\perp A'B'$, $HM\perp B'C'$.

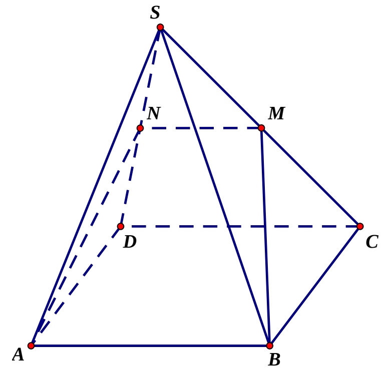
Ta có: $C'M=\frac{a}{3}\Rightarrow C'H=\frac{C'M}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{a}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2a}{3\sqrt{3}}$.

$$HN=C'N-C'H=\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{2a}{3\sqrt{3}}=\frac{5a\sqrt{3}}{18}$$

$$HB'^2=HN^2+NB'^2=\left(\frac{5a\sqrt{3}}{18}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{13a^2}{27}\Rightarrow AH=\sqrt{AB'^2-HB'^2}=\sqrt{(2a)^2-\frac{13a^2}{27}}=\frac{a\sqrt{285}}{9}$$

Suy ra thể tích lăng trụ là: $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta A'B'C'}.AH=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{285}}{9}=\frac{a^3\sqrt{95}}{12}$.

Câu 51: Chọn D



Gọi N là giao điểm của mặt phẳng (ABM) với SD, đặt $V = V_{S.ABCD}$.

Áp dụng công thức tỉ số thể tích cho khối chóp có đáy là hình bình hành:

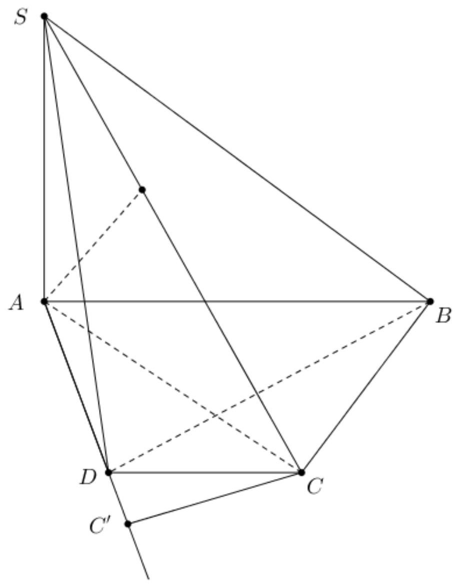
$\frac{SA}{SA} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SB} + \frac{SD}{SN} \Rightarrow \frac{SC}{SM} = \frac{SD}{SN}$, mà $\frac{SC}{SM} = 2 \Rightarrow \frac{SD}{SN} = 2$.

$$\frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{SA}{SA} + \frac{SB}{SB} + \frac{SC}{SM} + \frac{SD}{SN}}{4\frac{SA}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SC}{SM}.\frac{SD}{SN}} = \frac{1+1+2+2}{4.1.1.2.2} = \frac{3}{8}.$$

Mặt phẳng $(ABMN)$ chia hình chóp thành hai phần có thể tích theo tỉ lệ 3 và 5.

Suy ra: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$.

Câu 52: Chọn C



Cách 1: Gọi góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) là φ.

Dễ thấy $\begin{cases} BD \perp AD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow D$ là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (SAD)

Gọi C' là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (SAD).

Suy ra:

$$AC' = AC.\cos CAD = a\sqrt{3}.\cos 30^\circ \Rightarrow DC' = \frac{a}{2} \Rightarrow S_{\Delta SDC'} = \frac{1}{2}.DC'.SA = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

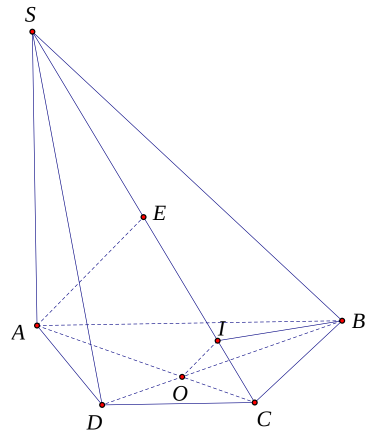
Suy ra $\Delta SDC'$ là hình chiếu vuông góc của ΔSBC lên mặt phẳng (SAD).

Ta có: $CB\perp AC\Rightarrow CB\perp\left(SAC\right)\Rightarrow CB\perp SC\Rightarrow\Delta SBC$ vuông tại C.

Tam giác SBC có $SB=a\sqrt{7};SC=a\sqrt{6};BC=a\Rightarrow S_{\Delta SBC}=\frac{1}{2}.SC.CB=\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Suy ra: $\cos\varphi=\frac{S_{\Delta SAC'}}{S_{\Delta SBC}}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{6}}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Cách 2:



Ta chứng minh được $BD\perp\left(SAD\right)$.

Dựng $SE\perp SC$ tại E $\Rightarrow SE\perp\left(SBC\right)$.

Suy ra: $\left(\left(SAD\right);\left(SBC\right)\right)=\left(AE;BD\right)$.

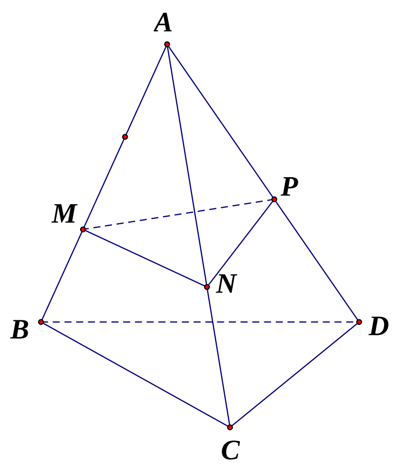
Gọi $O=AC\cap BD$; dựng $OI\perp SC=I$

$\Rightarrow OI//AE\Rightarrow\left(AE;BD\right)=\left(OI;BD\right)=IOB$

$CosIBO=\frac{OI}{OB}$. Ta tính được: $OE=\frac{a\sqrt{6}}{2}\Rightarrow OI=\frac{OE}{3}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$

$BD=a\sqrt{3}\Rightarrow BO=\frac{2}{3}BD=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Suy ra: $CosIOB=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 53: Chọn C



Đặt $\begin{cases}AN=x\\AP=y\end{cases}$ với $0<x<\frac{9}{2}$, $0<y<\frac{2}{3}$ suy ra $NC=\frac{9}{2}-x$.

$\frac{V_{AMNP}}{V_{ABCD}}=\frac{NC}{AN}\Leftrightarrow\frac{AM}{AB}.\frac{AN}{AC}.\frac{AP}{AD}=\frac{NC}{AN}\Leftrightarrow\frac{2}{3}.\frac{x}{\frac{9}{2}}.\frac{y}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{9}{2}-x}{x}\Leftrightarrow y=\frac{9}{2}.\frac{\frac{9}{2}-x}{x^2}\Leftrightarrow y=\frac{81-18x}{4x^2}$.

Suy ra $AN+AP=x+y=x+\frac{81-18x}{4x^2}$. Đặt $f\left(x\right)=x+\frac{81-18x}{4x^2}$ với $0<x<\frac{9}{2}$.

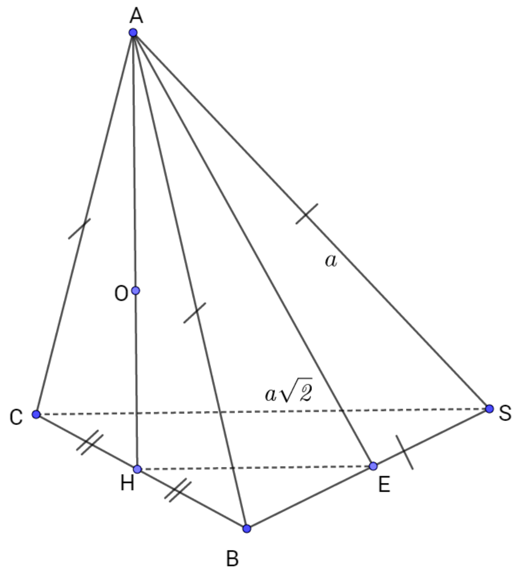
$f'\left(x\right)=1+\frac{9x^2-81x}{2x^4}=\frac{2x^4+9x^2-81x}{2x^4}$ có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		3		$\frac{9}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{15}{4}$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$

Từ bảng biến thiên ta thấy $AN + AP$ nhỏ nhất bằng $\frac{15}{4}$ khi $x = 3$.

Câu 54: Chọn A



Từ giả thiết suy ra $AC = \sqrt{SC^2 - SA^2} = a$. Gọi H, E lần lượt là trung điểm BC, BS.

ΔABC cân tại A, H là trung điểm $BC \Rightarrow AH \perp BC$.

$$\left.\begin{array}{l}(ABC) \perp (SBC) \\ AH \subset (ABC), AH \perp BC\ (cmt)\end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp BS.$$

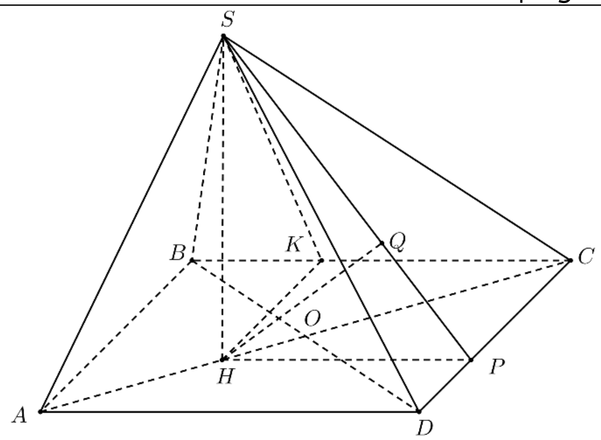
$$\left.\begin{array}{l}BS \perp AH \\ BS \perp AE\end{array}\right\} \Rightarrow BS \perp HE,\ HE//CS \Rightarrow BS \perp CS \Rightarrow \Delta BSC \text{ vuông tại } S.$$

$\Rightarrow AH$ là trục đường tròn ngoại tiếp $\Delta BSC \Rightarrow$ tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC: R = OA = OB = OC = \frac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{AB.AC.BC}{2AH.BC} = \frac{AB.AC}{2\sqrt{AB^2 - \frac{BC^2}{4}}} = a$.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $V = \frac{4\pi a^3}{3}$.

Câu 55: Chọn B



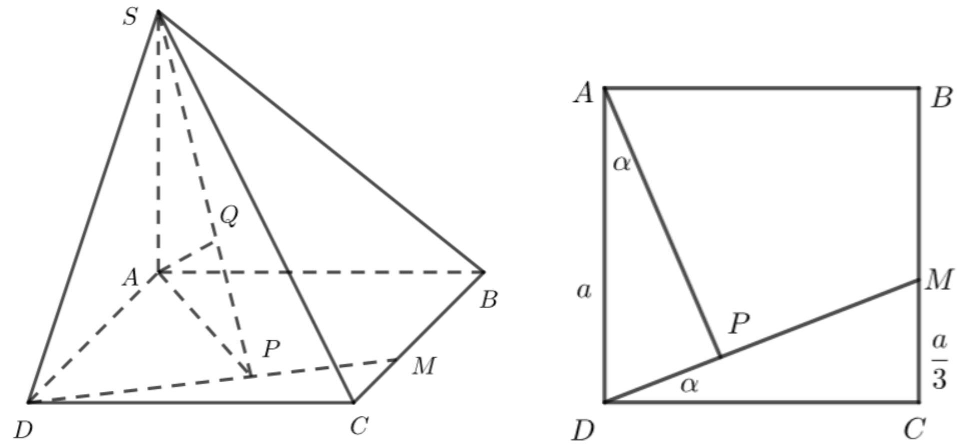
Kẻ $HK \perp BC$ tại K, suy ra $HK = \frac{2a}{3}$, $SKH = 60°$ và ΔSHK vuông tại H.

Suy ra $SH = h = HK.\tan 60° = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Kẻ $HP \perp CD$ tại P, hạ $HQ \perp SP$ tại Q. Suy ra $HP = \frac{2a}{3}$

$$d\left(A,\left(SCD\right)\right) = \frac{3}{2}d\left(H,\left(SCD\right)\right) = \frac{3}{2}.HQ = \frac{3}{2}.\frac{SH.HP}{\sqrt{SH^2 + HP^2}} = 3\sqrt{3}$$

Câu 56: Chọn B



Đây là dạng bài cơ bản về khoảng cách từ chân đường cao A đến mặt phẳng nghiêng có đỉnh S.

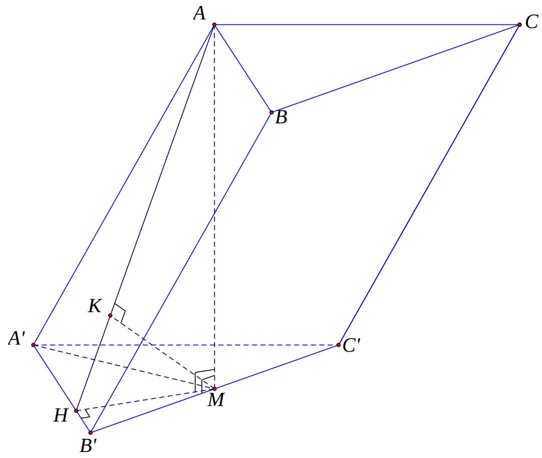
Hạ AP vuông góc với DM tại P, dựng AQ vuông góc với SP tại Q, khi đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(SDM\right)$ chính là AQ.

Ta có: $AP = AD.\cos\alpha = AD.\frac{DC}{DM} = a.\frac{a}{\frac{a\sqrt{10}}{3}} = \frac{3a}{\sqrt{10}}$.

Có: $d\left(A;\left(SDM\right)\right) = AQ \Rightarrow \frac{1}{AQ^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AP^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{\left(\frac{3a}{\sqrt{10}}\right)^2} \Rightarrow SA = \frac{3a}{\sqrt{26}}$.

Suy ra thể tích: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \frac{1}{3}a^2.\frac{3a}{\sqrt{26}} = \frac{a^3}{\sqrt{26}}$.

Câu 57: Chọn A



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên $A'B'$ và K là hình chiếu vuông góc của điểm M trên AH. Ta có $MK \perp (ABA')$, suy ra $d\left(M,(ABA')\right) = MK$.

Tam giác $AA'M$ vuông tại M có $A'M = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $A'A = 2a \Rightarrow AM = \sqrt{A'A^2 - A'M^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Tam giác $HB'M$ vuông tại H, có $B'M = \dfrac{a}{2}$ và $HB'M = 60^0$,

$\Rightarrow \sin HB'M = \dfrac{HM}{B'M} \Rightarrow HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác HAM vuông tại M suy ra $KM = \sqrt{\dfrac{HM^2.AM^2}{HM^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{39}}{2\sqrt{55}}$.

Suy ra $d\left(C',(ABA')\right) = 2d\left(M,(ABA')\right) = a\sqrt{\dfrac{39}{55}}$.

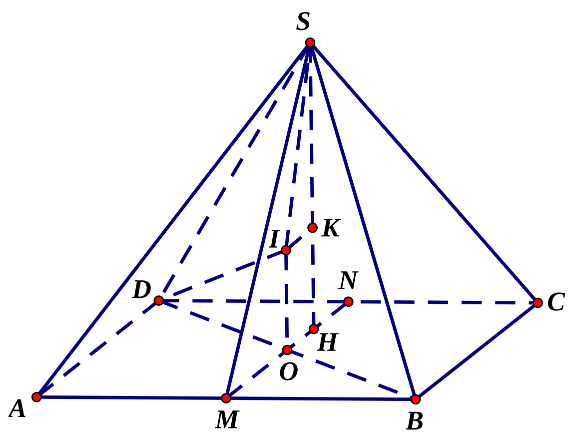
Câu 58: Chọn C

Gọi M, N là trung điểm của AB và CD D thì ta có $SM \perp AB, MN \perp AB \Rightarrow AB \perp (SMN)$.

Kẻ $SH \perp MN, H \in MN$, khi đó $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}a^2.SH = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow SH = \dfrac{3a}{2}$.

Có $SM = a\sqrt{3} \Rightarrow MH = \sqrt{SM^2 - SH^2} = \sqrt{3a^2 - \dfrac{9a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \to OH = MH - MO = \dfrac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$.



Gọi $O = AC \cap BD$, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ suy ra $IO \perp (ABCD)$

$\Rightarrow IO // SH$. Kẻ $IK \perp SH, K \in SH \Rightarrow$ $IOHK$ là hình chữ nhật.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$ là:

$$R = IS = \sqrt{IK^2 + KS^2} = \sqrt{OH^2 + \left(SH - IO\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4} + \left(\frac{3a}{2} - IO\right)^2}$$

$$R = ID = \sqrt{IO^2 + OD^2} = \sqrt{OH^2 + \left(SH - IO\right)^2} = \sqrt{IO^2 + \frac{5a^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4} + \left(\frac{3a}{2} - IO\right)^2 = IO^2 + \frac{5a^2}{4} \Rightarrow IO = \frac{4-\sqrt{3}}{6}a.$$

Suy ra bán kính: $R = \sqrt{IO^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{4-\sqrt{3}}{6}\right)^2 a^2 + \frac{5a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{16-2\sqrt{3}}}{3}$.

DẠNG 9 Bài toán về khoảng cách và góc

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $3a$. M thuộc cạnh $A'D'$ sao cho $A'M = 2a$. Tính khoảng cách giữa AM và BD' theo a

A. $\frac{3\sqrt{14}}{14}a$. **B.** $\frac{\sqrt{14}}{14}a$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}a$. **D.** $\frac{3\sqrt{7}}{7}a$.

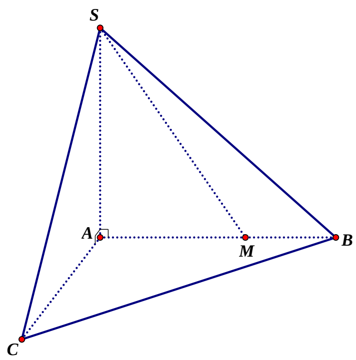
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt đáy là tam giác vuông tại đỉnh A, $AB = AC = a$. Đường thẳng SA vuông góc với $mp\ ABC$, $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{a}$. **D.** $3\sqrt{3}a$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh $AB = a$, $BAD = 60°$, $SO \perp (ABCD)$, $SO = \frac{3a}{4}$. Gọi M là trung điểm của CD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD là

A. $\frac{3a}{8}$. **B.** $\frac{3\sqrt{7}a}{14}$. **C.** $\frac{8a}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{7}a}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$, tam giác ABC có $AB = 6a$, $AC = 3a$, $BAC = 120°$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$ (Xem hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng

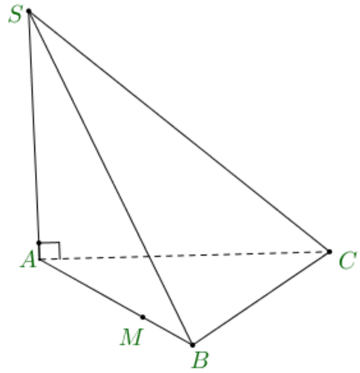


A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $\frac{4a\sqrt{39}}{13}$. **D.** $\frac{6a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 5: Cho $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và SD bằng

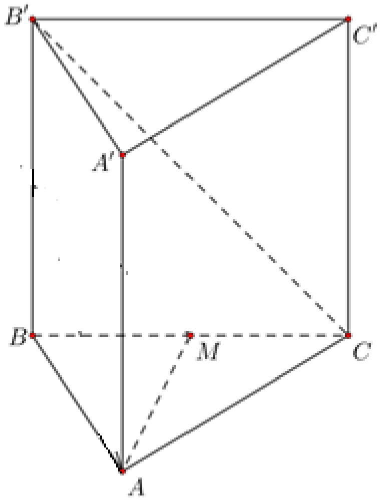
A. $\frac{a}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{57}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC đều cạnh 3a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$ (minh họa như hình vẽ). Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $AM = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng



A. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. B. $\sqrt{21}a$. C. $2\sqrt{21}a$. D. $\frac{2\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông, $BA = BC = 2a$, cạnh bên $AA' = 4a$, M là trung điểm của BC (minh họa như hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và AM bằng



A. $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. C. a. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC**.** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$ biết $AA' = a\sqrt{2}$.

A. $\frac{a\sqrt{10}}{10}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a\sqrt{30}}{10}$. D. $2a$.

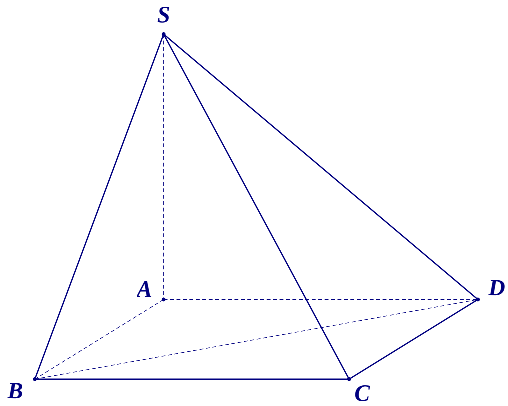
Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là điểm thuộc AD sao cho $AM = 3MD$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD bằng

A. $\frac{a\sqrt{35}}{35}$. B. $\frac{3a\sqrt{35}}{35}$. C. $\frac{2a\sqrt{35}}{35}$. D. $\frac{9a\sqrt{35}}{35}$.

Câu 10: Cho hình chóp $SABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB cân tại S. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy nằm trên miền trong hình vuông $ABCD$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt đáy bằng 30°, góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt đáy bằng 45°. Thể tích hình chóp $SABCD$ bằng $\frac{a^3}{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SA.

A. $2a$. **B.** a. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$ (*hình vẽ minh họa*). Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

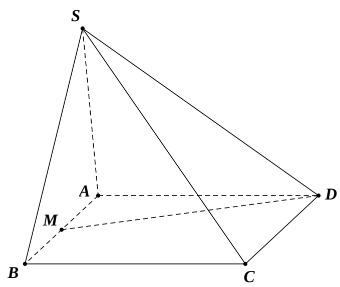


A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Câu 12: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{37}}{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh SA. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{5a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a; AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 3a$. Gọi M là trung điểm AB, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và DM.



A. $\frac{4a\sqrt{21}}{21}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{21}}{21}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{21}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $AB = BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°. Gọi M là trung điểm của AC, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SM theo a.

A. $\frac{2a\sqrt{39}}{\sqrt{13}}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{11}}{13}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{11}}{\sqrt{13}}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

A. $\frac{a\sqrt{42}}{8}$. **B.** $\frac{a\sqrt{42}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{42}}{12}$. **D.** $\frac{a\sqrt{42}}{10}$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Biết hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ và $AA' = a$. Ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và $(SAD) \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của cạnh đáy AB. Ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CM là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

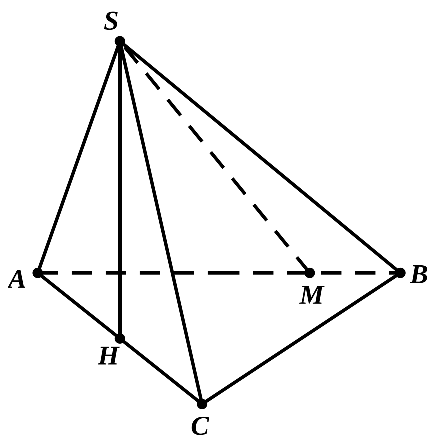
Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa AC và SB, biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30^o.

A. $\frac{\sqrt{5}a}{2}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{2\sqrt{37}a}{185}$. **D.** $\frac{2\sqrt{185}a}{37}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành thỏa mãn $AB = a\sqrt{6}$, $BC = 3a$, $AC = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 3a$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BM = 2MC$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SD là

A. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng chứa đáy là trung điểm H của AC và $SH = 2a$. Gọi điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM = 3MB$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Khoảng cách giữa SM và BC bằng

A. $a\sqrt{\dfrac{12}{259}}$. **B.** $a\sqrt{\dfrac{259}{12}}$. **C.** $a\sqrt{\dfrac{67}{12}}$. **D.** $a\sqrt{\dfrac{12}{67}}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh a, tam giác SBA vuông tại B, tam giác SAC vuông tại C. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa SC và AB theo a.

A. $\dfrac{\sqrt{3}a}{8}$. **B.** $\dfrac{3a}{\sqrt{13}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{4}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB, góc giữa SC và đáy bằng $60°$. Tính khoảng cách giữa SB và AC.

A. $\dfrac{3a}{\sqrt{26}}$. **B.** $\dfrac{3a}{\sqrt{13}}$. **C.** $\dfrac{3a}{\sqrt{52}}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{13}}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là nửa lục giác đều với $AD = 2a, AB = BC = CD = a$, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD theo a .

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 24: Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a*. Gọi *G* là trọng tâm tam giác ***ABC.*** Góc giữa đường thẳng *SA* với mặt phẳng *(ABC)* bằng 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng *GC* và *SA* bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{a}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy là nửa lục giác đều có $AB = BC = CD = a$, $SA \perp \ ABCD$, góc giữa SC và $ABCD$ là $45°$. Khoảng cách giữa SB và CD là

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\dfrac{3a}{5}$. **D.** $\dfrac{5a}{3}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $4a$, ΔSAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $BAD = 120^0$. Gọi M là điểm trên cạnh CD sao cho $CM = 3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM bằng

A. $\dfrac{8\sqrt{51}}{17}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{51}}{12}a$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{51}}{17}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{51}}{6}a$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, $AC = 2a, BC = a, DC = a\sqrt{5}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm OA, $DM \cap AB = N$. Tính $\mathrm{d}\left(N,(SBC)\right)$

A. $\dfrac{2}{3}a$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{5}}{15}a$. **C.** $\dfrac{1}{2}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}a$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Độ dài các cạnh $AB=3a, AD=4a, SA=5a$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh BC và $BM=3a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MD là

A. $\dfrac{15a}{\sqrt{259}}$. **B.** $\dfrac{29a}{\sqrt{245}}$. **C.** $\dfrac{39a}{\sqrt{245}}$. **D.** $\dfrac{45a}{\sqrt{259}}$.

Câu 29: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BM.

A. $\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $a\sqrt{22}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{22}$. **D.** $a\sqrt{11}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=a$, $AD=2a$, SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{9}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA\perp\left(ABC\right)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng $75°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB gần bằng giá trị nào sau đây? (lấy 3 chữ số phần thập phân)

A. $0.833a$. **B.** $0.844a$. **C.** $0.855a$. **D.** $0.866a$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, với $AB//CD$ $AB=3a,$ $AD=DC=a$, $BAD=60^0$, biết SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AB=3AM$. Khoảng cách giữa SM và AD bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a}{5}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD là tam giác đều, (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách giữa SA và BD.

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{10}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $ABC=60^0$, $SA\perp\left(ABCD\right)$, góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ bằng 30^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD.

A. $\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{13}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{13}}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB=2a, AD=DC=CB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=3a$. Gọi E là trung điểm AD, F nằm trên AB sao cho $AF=\dfrac{1}{4}AB$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và EF bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{9a}{8}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{13}a}{13}$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{13}a}{13}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SD vuông góc với $(ABCD)$, $SD = a\sqrt{5}$. Đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $CD = 2AD = 2AB = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM.

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a}{4}$. **D.** $\frac{a}{5}$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, $ABC = 60°$, mặt bên SAB là tam giác đều. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của AO. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD.

A. $\frac{a\sqrt{560}}{112}$. **B.** $\frac{a\sqrt{560}}{10}$. **C.** $\frac{a\sqrt{560}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{560}}{28}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $SA \perp (ABCD)$; $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Gọi N là trung điểm SA. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng SC và DN, biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD = \frac{a\sqrt{33}}{2}$. Hình chiếu vuông góc H của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB. Gọi K là trung điểm của AD. Tính khoảng cách giữa hai đường SD và HK theo a.

A. $\frac{a\sqrt{399}}{19}$. **B.** $\frac{a\sqrt{105}}{15}$. **C.** $\frac{a\sqrt{399}}{57}$. **D.** $\frac{a\sqrt{105}}{3}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$; $AD = 2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của AD. Tính khoảng cách giữa SM và CD.

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{17}}{17}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{5a}{6}$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có ΔABC vuông cân tại B, $AB = a$, $SAB = SCB = 90°$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $AB = 2a$, $BC = 4a$. Gọi M là trung điểm của BC có $SCB = SMA = 90^0$, $\left(SB,(ABC)\right) = 60^0$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{4\sqrt{39}a^3}{3}$. **B.** $4\sqrt{39}a^3$. **C.** $\sqrt{39}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{39}a^3}{3}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = 4a\sqrt{3}$, $ASB > 30°$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $30°$. Biết I trung điểm SA là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Gọi α là góc giữa IB và mặt phẳng (SAC). Khi $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$ thì khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\frac{14\sqrt{3}}{5}a$. **B.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}a$. **C.** $3\sqrt{3}a$. **D.** $4\sqrt{3}a$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = a$, $SBA = SCA = 90^0$, góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$. **B.** $a^3\sqrt{5}$. **C.** $\frac{2a^3\sqrt{5}}{3}$. **D.** $2a^3\sqrt{5}$.

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SB = 2\sqrt{3}a, AB = 2\sqrt{2}a$, $SAB = SCB = 90^0$, $\left(SB,(ABC)\right) = 30^0, \left((SBC),(ABC)\right) = 60^0$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a bằng

A. $\frac{16\sqrt{6}a^3}{27}$. **B.** $\frac{8\sqrt{6}a^3}{27}$. **C.** $\frac{8\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SBA = SCA = 90^0$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0.Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = BC = a$, $ABC = 120^\circ$, cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $\frac{\sqrt{10}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) nằm trên tia $Cx \parallel AB$ (cùng phía với A trong nửa mặt phẳng bờ BC) và nhìn cạnh AC dưới góc 60°.

A. a^3. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có $ABC = 135^0$, $AB = a, BC = \sqrt{2}a$, $\left(AC,(SAB)\right) = \alpha$ $SAB = SBC = 90^0$, thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{1}{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a bằng

A. $\frac{a^3}{12}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\sqrt{5}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{5}a^3}{3}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC cân tại A, cạnh $AB = a$, góc $BAC = 120°$. Tam giác SAB vuông tại B, tam giác SAC vuông tại C. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$, $SBA = SCA = 90°$ góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

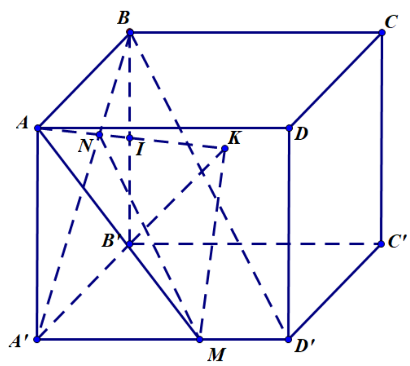
A. $\dfrac{4a^3}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $4a^3$. **D.** $\dfrac{4a^3}{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.A	4.A	5.D	6.A	7.D	8.C	9.A	10.B
11.A	12.D	13.A	14.B	15.A	16.D	17.D	18.D	19.D	20.D
21.B	22.B	23.D	24.A	25.B	26.A	27.B	28.D	29.A	30.C
31.B	32.A	33.D	34.A	35.B	36.D	37.D	38.A	39.C	40.A
41.C	42.A	43.D	44.A	45.A	46.D	47.D	48.A	49.C	50.D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chọn A.



Gọi I là trung điểm của BB'. $N = AI \cap BA'$ thì N trọng tâm tam giác ABB'.

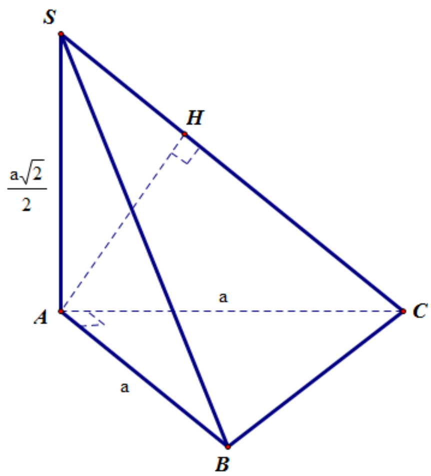
Khi đó $MN \parallel BD'$. Suy ra $BD' \parallel (AMK)$ với $K = A'B' \cap AI$ và $A'K = 6a$.

Ta có $d(AM, BD') = d(D', (AMK)) = \frac{1}{2}.d(A', (AMK)) = \frac{1}{2}.d$.

Do $A'M, A'A, A'K$ đôi một vuông góc nên

$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{A'M^2} + \frac{1}{A'K^2} = \frac{7}{18a^2} \Rightarrow d = \frac{3\sqrt{14}}{7}a$. Vậy $d(AM, BD') = \frac{3\sqrt{14}}{14}a$.

Câu 2. Chọn A

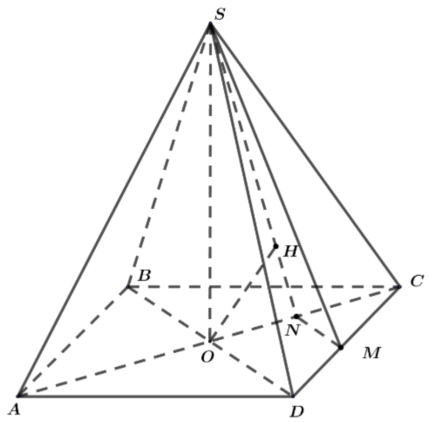


AC là hình chiếu của SC lên mp ABC , $AB \perp AC \Rightarrow AB \perp SC$.

Trong mặt phẳng SAC dựng $AH \perp SC$ thì AH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng

AB và SC và $d\ \ AB,SC\ = AH = \dfrac{AC.SA}{\sqrt{AC^2+SA^2}} = \dfrac{\dfrac{a.a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2+\dfrac{2a^2}{4}}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3. Chọn A



Gọi N là trung điểm của OC. Trong $\left(SON\right)$, kẻ $OH \perp SN$ $\left(H \in SN\right).(1)$

Do M, N lần lượt là trung điểm của CD và OC nên MN là đường trung bình của ΔOCD.

$\Rightarrow MN // OD$ hay $MN // BD$. Do đó $d\left(BD,SM\right) = d\left(BD,\left(SMN\right)\right) = d\left(O,\left(SMN\right)\right)$.

Ta có $\begin{cases} MN // BD \\ BD \perp AC \end{cases}$ nên $MN \perp AC$ hay $MN \perp ON$.

Lại có $MN \perp SO$ (do $SO \perp \left(ABCD\right)$) nên $MN \perp \left(SON\right) \Rightarrow MN \perp OH .(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp \left(SMN\right) \Rightarrow d\left(BD,SM\right) = d\left(O,\left(SMN\right)\right) = OH$.

Do $ABCD$ là hình thoi nên $AB = AD = a$.

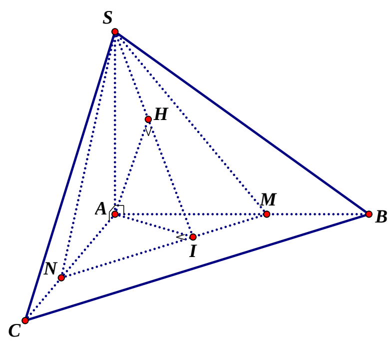
Lại có $BAD = 60°$ nên ΔABD là tam giác đều cạnh a.

Mà AO là đường cao của ΔABD nên $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ON = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét ΔSON vuông tại O có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{ON^2} + \dfrac{1}{SO^2} = \dfrac{16}{3a^2} + \dfrac{16}{9a^2} = \dfrac{64}{9a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{3a}{8}$.

Vậy $d\left(BD,SM\right) = \dfrac{3a}{8}$.

Câu 4.



Chọn A

Kẻ $MN//BC$, suy ra $BC//(SMN)$.

Ta có $d(SM,BC)=d\left(BC,(SMN)\right)=d\left(B,(SMN)\right)=\frac{1}{2}d\left(A,(SMN)\right)$.

Kẻ $AI\perp MN, AH\perp SI$, suy ra $AH\perp(SMN)$, $d\left(A,(SMN)\right)=AH$.

$\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{2}{3}\Rightarrow AN=\frac{2}{3}.AC=\frac{2}{3}.3a=2a$.

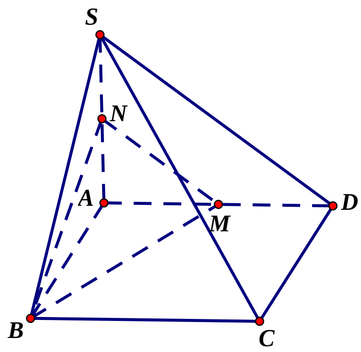
$MN=\sqrt{(2a)^2+(4a)^2-2.2a.4a.\cos120^\circ}=2a\sqrt{7}$.

$S_{AMN}=\frac{1}{2}AM.AN.\sin BAC=\frac{1}{2}AI.MN\Rightarrow AI=\frac{AM.AN.\sin BAC}{MN}=\frac{4a.2a.\sin120^\circ}{2a\sqrt{7}}=\frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{(a\sqrt{2})^2}+\frac{1}{\left(\frac{2a\sqrt{21}}{7}\right)^2}=\frac{13}{12a^2}\Rightarrow AH=\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Vậy $d(SM,BC)=\frac{1}{2}.\frac{2a\sqrt{39}}{13}=\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 5. Chọn D



Gọi N là trung điểm của SA. Do MN là đường trung bình của tam giác SAD nên $MN//SD$.

Vậy $SD//(BMN)$ vì vậy $d(SD,BM)=d\left(SD,(BMN)\right)=d\left(D,(BMN)\right)=d\left(A,(BMN)\right)=h$.

Do $A.BMN$ là một góc tam diện vuông nên

$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{19}{3a^2}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 6.Chọn A.

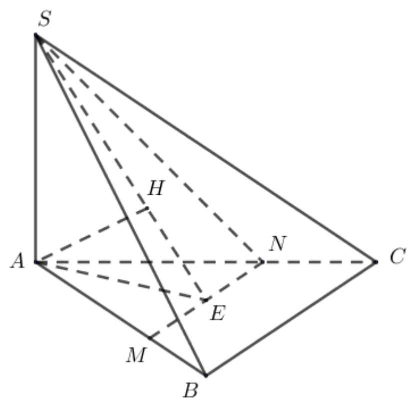
Gọi N là điểm trên cạnh AC sao cho $AN=2a$, ta có:

$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{2}{3}\Rightarrow MN//BC\Rightarrow BC//(SMN)$.

Suy ra

$d(BC,SM)=d\left(BC,(SMN)\right)=d\left(B,(SMN)\right)$.

$d\left(B,(SMN)\right)=\frac{BM}{AM}.d\left(A,(SMN)\right)=\frac{1}{2}d\left(A,(SMN)\right)$.

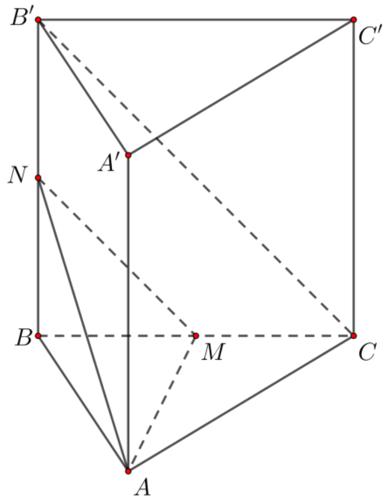


Gọi E là trung điểm của MN, kẻ $AH\perp SE$, $(H\in SE)$ vì tam giác AMN đều cạnh $2a$ nên $AE=a\sqrt{3}$.

Do $\begin{cases} AE \perp MN \\ SA \perp MN \end{cases} \Rightarrow MN \perp AH$. Mặt khác $AH \perp SE \Rightarrow AH \perp (SMN) \Rightarrow d(A,(SMN)) = AH$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAE , ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{7}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{21}a}{7}$. Vậy $d(BC, SM) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 7. Chọn D



Gọi N là trung điểm của BB' , khi đó MN là đường trung bình của $\Delta BCB'$

$\Rightarrow MN // B'C \Rightarrow B'C // (AMN)$

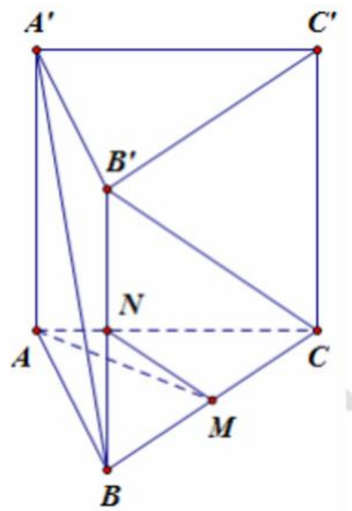
$\Rightarrow d(AM, B'C) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN)) = d(B, (AMN)) = h$

Tính $d(B, (AMN))$. Ta có $BN = \frac{1}{2}BB' = 2a; BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.2a = a$

Áp dụng công thức tính đường cao của tứ diện vuông ta có : $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{6}{4a^2} \Rightarrow h = \frac{2a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Vậy $d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

.

Câu 8. Chọn C



Gọi N là trung điểm của BB' suy ra $MN // B'C$.

Do đó $d\left(AM,B'C\right)=d\left(B'C,\left(AMN\right)\right)=d\left(C,\left(AMN\right)\right)$.

Mà M là trung điểm của BC nên $d\left(B,\left(AMN\right)\right)=d\left(C,\left(AMN\right)\right)$.

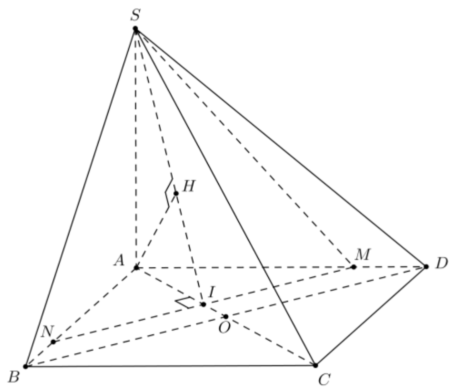
Ta có $BA,\ BM,\ BN$ đôi một vuông góc với nhau nên $\dfrac{1}{d^2\left(B,\left(AMN\right)\right)}=\dfrac{1}{BA^2}+\dfrac{1}{BM^2}+\dfrac{1}{BN^2}$.

Mặt khác $BM=\dfrac{BC}{2}=a, AB=a\sqrt{3}, BN=\dfrac{1}{2}BB'=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $\dfrac{1}{d^2\left(B,\left(AMN\right)\right)}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\dfrac{10}{3a^2}$.

$\Rightarrow d\left(B,\left(AMN\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{30}}{10}\Rightarrow d\left(AM,B'C\right)=\dfrac{a\sqrt{30}}{10}$

Câu 9. Chọn A



Gọi N là điểm thuộc AB sao cho $AN=3NB\Rightarrow MN//BD\Rightarrow BD//\left(SMN\right)$,

$d\left(BD,SM\right)=d\left(BD,\left(SMN\right)\right)=d\left(O,\left(SMN\right)\right)$, (với O là tâm hình vuông $ABCD$).

Gọi $I=AO\cap MN$, do $AO\cap\left(SMN\right)=I\Rightarrow\dfrac{d\left(O,\left(SMN\right)\right)}{d\left(A,\left(SMN\right)\right)}=\dfrac{IO}{IA}=\dfrac{1}{3}$ \

$\Rightarrow d\left(O,\left(SMN\right)\right)=\dfrac{1}{3}d\left(A,\left(SMN\right)\right)$. Trong $\left(SAI\right)$ kẻ $AH\perp SI$.

Ta có $MN\perp AI, MN\perp SA\Rightarrow MN\perp\left(SAI\right)\Rightarrow MN\perp AH$.

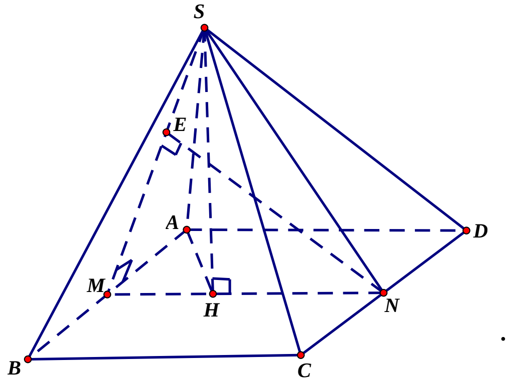
$AH\perp SI, AH\perp MN\Rightarrow AH\perp\left(SMN\right)\Rightarrow d\left(A,\left(SMN\right)\right)=AH$.

Có $AI=\dfrac{3}{4}AO=\dfrac{3}{4}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Tam giác SAI vuông tại A, AH là đường cao nên $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AI^2}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{64}{18a^2}=\dfrac{35}{9a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{3a\sqrt{35}}{35}$.

Vậy $d\left(O,\left(SMN\right)\right)=\dfrac{1}{3}d\left(A,\left(SMN\right)\right)=\dfrac{1}{3}AH=\dfrac{a\sqrt{35}}{35}$.

Câu 10. Chọn B



Gọi M , N lần lượt là trung điểm AB và CD, suy ra $AB \perp (SMN)$.

Kẻ $SH \perp MN$, $H \in MN$, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Khi đó $(SA,(ABCD)) = SAH = 30°$ và $((SAB),(ABCD)) = SMH = 45°$.

Kẻ $NE \perp SM$, $E \in SM$, suy ra $NE \perp (SAB)$.

Ta có $d(CD, SA) = d(CD,(SAB)) = d(N,(SAB)) = NE.$

$SA = \dfrac{SH}{\sin 30°} = 2SH$; $SM = \dfrac{SH}{\sin 45°} = \sqrt{2}\,SH$.

Lại có $SA^2 = SM^2 + AM^2 \Leftrightarrow 4SH^2 = 2SH^2 + \dfrac{AB^2}{4} \Leftrightarrow 8SH^2 - AB^2 = 0 \ (1)$.

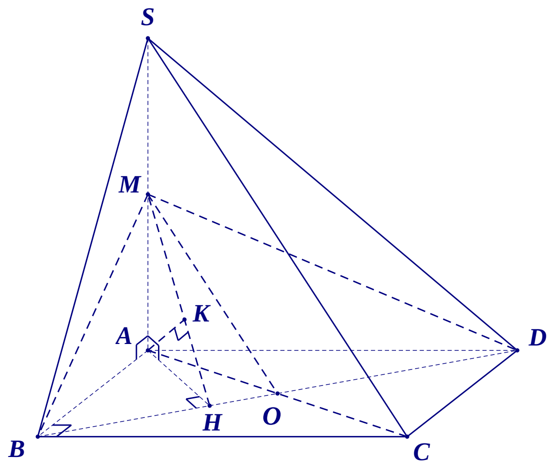
Và $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SH.AB^2 = \dfrac{a^3}{3} \Rightarrow SH.AB^2 = a^3 \ (2)$.

Giải (1) và (2) ta được $SH = \dfrac{a}{2}$; $AB = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SMN có $SH.MN = NE.SM \Rightarrow NE = \dfrac{\dfrac{a}{2}.a\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}a} = a$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SA bằng a.

Câu 11. Chọn A



Gọi O là giao điểm của AC và BD; M là trung điểm của cạnh SA.

Ta có OM là đường trung bình của tam giác SAC nên $OM // SC$. Suy ra $SC // (MBD)$.

Lúc đó $d\left(SC,BD\right)=d\left(SC,\left(MBD\right)\right)=d\left(C,\left(MBD\right)\right)$. (1)

Mặt khác, do AC cắt $\left(MBD\right)$ tại O và $OA=OC$ nên $d\left(C,\left(MBD\right)\right)=d\left(A,\left(MBD\right)\right)=AK$, với K là hình chiếu của A lên $\left(MBD\right)$. (2)

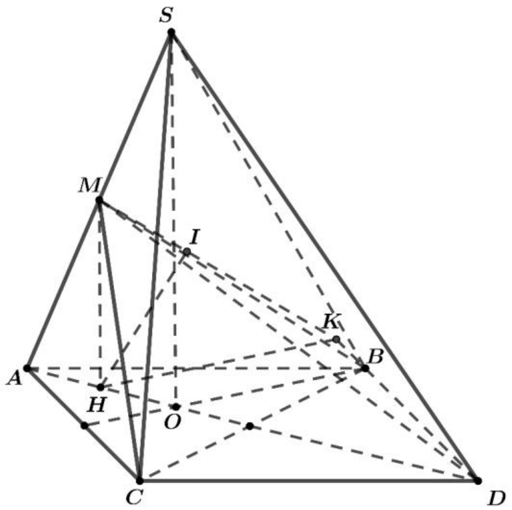
Xét tứ diện $A.MBD$ có AB, AD và AM đôi một vuông góc, ta có

$\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(2a\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{9}{4a^2}$. Suy ra $AK=\frac{2a}{3}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $d\left(SC,BD\right)=\frac{2a}{3}$.

Câu 12. Chọn D

Cách 1:



Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$.

Khi đó, $AC\,//\,BD\Rightarrow AC\,//\left(MBD\right)\Rightarrow \mathrm{d}\left(AC,BM\right)=\mathrm{d}\left(AC,\left(MBD\right)\right)=\mathrm{d}\left(A,\left(MBD\right)\right)$.

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC. Suy ra $SO\perp\left(ABC\right)$.

Gọi H là trung điểm AO. Suy ra $MH\,//\,SO\Rightarrow MH\perp\left(ABC\right)$.

Vẽ $HK\perp BD$ tại K. Suy ra $HK\,//\,BO$. Suy ra $\frac{BO}{HK}=\frac{OD}{HD}=\frac{4}{5}\Rightarrow HK=\frac{5}{4}BO$.

Mà $BO=\frac{2}{3}.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ suy ra $HK=\frac{5}{4}.\frac{2a\sqrt{3}}{3}=\frac{5a\sqrt{3}}{6}$.

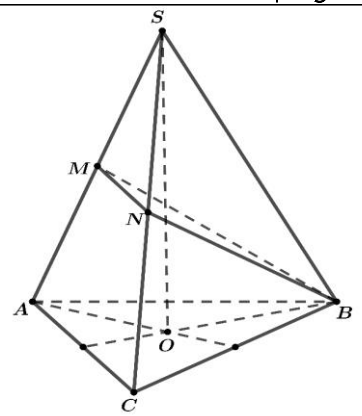
Vẽ $HI\perp MK$ tại I. Suy ra $\mathrm{d}\left(H,\left(MBD\right)\right)=HI$.

Ta có, $SO^2=SA^2-AO^2=\left(\frac{a\sqrt{37}}{3}\right)^2-\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{25a}{9}\Rightarrow SO=\frac{5a}{3}\Rightarrow MH=\frac{5a}{6}$.

Mà $\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{MH^2}+\frac{1}{HK^2}$ suy ra $HI=\frac{5a\sqrt{3}}{12}\Rightarrow \mathrm{d}\left(H,\left(MBD\right)\right)=HI=\frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

Mà $\frac{\mathrm{d}\left(H,\left(MBD\right)\right)}{\mathrm{d}\left(A,\left(MBD\right)\right)}=\frac{HD}{AD}=\frac{5}{6}\Rightarrow \mathrm{d}\left(A,\left(MBD\right)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $\mathrm{d}\left(AC,BM\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cách 2:



Gọi M là trung điểm AC.

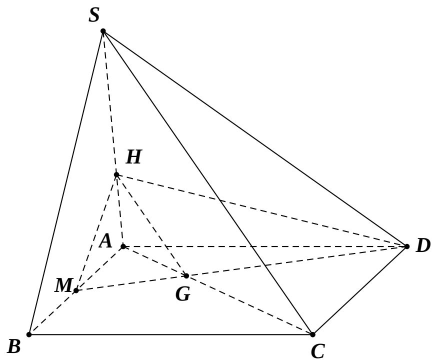
Suy ra $\mathrm{d}\left(AC,BM\right)=\mathrm{d}\left(AC,\left(BMN\right)\right)=\mathrm{d}\left(A,\left(BMN\right)\right)=\mathrm{d}\left(S,\left(BMN\right)\right)$.

Ta có, $\mathrm{d}\left(S,\left(BMN\right)\right)=\dfrac{3.V_{S.BMN}}{S_{BMN}}=\dfrac{3.V_{S.ABC}}{4.S_{BMN}}$. Ta có $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.SO.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{5a}{3}.a^2\sqrt{3}=\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{9}$.

Ta có $BM=BN=\sqrt{\dfrac{BS^2+BC^2}{2}-\dfrac{SC^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{109}}{6}$, $MN=a$ suy ra $S_{BMN}=\dfrac{5a}{6}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(AC,BM\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 13. Chọn A



Gọi G là giao của AC và DM thì $\dfrac{GA}{GC}=\dfrac{MA}{CD}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{AG}{AC}=\dfrac{1}{3}$.

Vẽ $GH\,//\,SC$ thì $\dfrac{AH}{AS}=\dfrac{AG}{AC}=\dfrac{1}{3}$ và $(HDM)\,//\,SC$

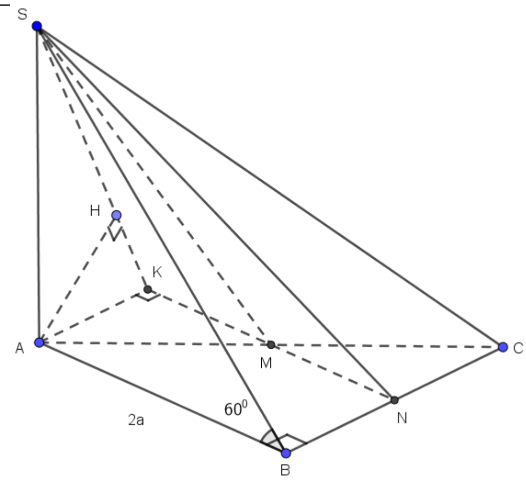
Do đó $d\left(SC,DM\right)=d\left(SC,(HDM)\right)=d\left(C,(HDM)\right)$

Xét tứ diện $H.ADM$ thì ta thấy đây là tứ diện vuông, nên gọi $h=d\left(A,(HDM)\right)$ thì

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{AH^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{\left(\frac{SA}{3}\right)^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{a^2}+\frac{1}{4a^2}\Rightarrow h=\frac{2a\sqrt{21}}{21}$$

Vậy $d\left(SC,DM\right)=d\left(C,(HDM)\right)=\dfrac{GC}{GA}d\left(A,(HDM)\right)=2.\dfrac{2a\sqrt{21}}{21}=\dfrac{4a\sqrt{21}}{21}$.

Câu 14. Chọn B



Gọi N là trung điểm của BC, khi đó $AB//MN$, vậy $AB//(SMN)$.

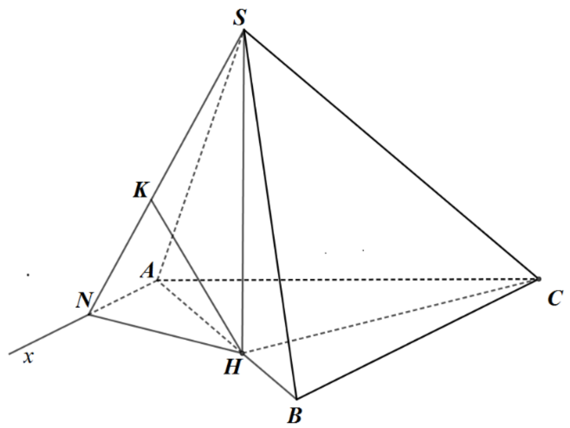
Khi đó $d(AB;SM)=d(AB;(SMN))=d(A;(SMN))$.

Dựng $AK\perp MN$, dựng $AH\perp SK$. Khi đó $d(A;(SMN))=AH$.

Góc giữa mp(SBC) và mp(ABC) bằng góc SBA, vậy $SBA=60°$.

Ta có $SA=AB.\tan SBA=2a\sqrt{3}$, $AK=BN=a$. Vậy $AH=\dfrac{AK\times AS}{\sqrt{AK^2+AS^2}}=\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 15. Chọn A



Áp dụng định lí cosin trong tam giác HBC ta có:

$$HC=\sqrt{HB^2+BC^2-2HB.BC\cos HBC}=\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2+a^2-2.a.\frac{a}{3}\cos 60^0}=\frac{a\sqrt{7}}{3}$$

Theo giả thiết ta có góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$ nên suy ra

$SCH=(SC;(ABC))=60°$

Trong tam giác vuông SHC vuông tại H ta có: $SH=HC\tan 60^0=\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. Kẻ $Ax\parallel BC$.

Gọi N và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Ax và SN.

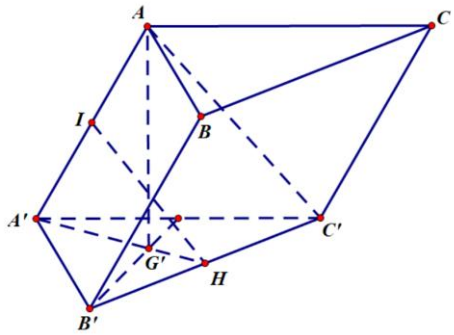
Ta có $BC\parallel(SAN)$ và $BA=\dfrac{3}{2}AH$ nên $d(SA;BC)=d(B,(SAN))=\dfrac{3}{2}d(H,(SAN))$.

Ta cũng có $Ax \perp (SHN)$ nên $Ax \perp HK$. Do đó $HK \perp (SAN) \Rightarrow d(H,(SAN)) = HK$

$$AH = \frac{2a}{3},\ HN = AH.\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow HK = \frac{SH.HN}{\sqrt{SH^2 + HN^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}$$

Vậy $d(SA;BC) = \dfrac{a\sqrt{42}}{8}$.

Câu 16. Chọn D



Do hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$, tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều cạnh a và cạnh $AA' = a$ nên tứ diện $AA'B'C'$ là tứ diện đều.

Gọi H, I lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và AA', ta có các tam giác $\Delta IB'C', \Delta HAA'$ là các tam giác cân nên $IH \perp AA', IH \perp B'C'$. Do đó $d(AA', B'C') = IH$.

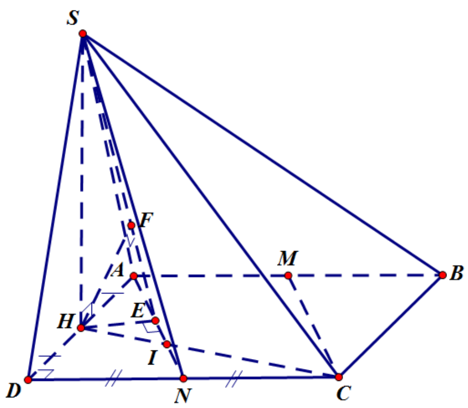
Ta có $A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, A'G' = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, AG' = \sqrt{AA'^2 - A'G'^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác $AA'H$ ta có:

$$\frac{1}{2}AG'.A'H = \frac{1}{2}AA'.HI \Rightarrow HI = \frac{AG'.A'H}{AA'} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 17. Chọn D



Gọi N, H lần lượt là trung điểm của AD và CD. Ta có:

Tam giác SAD đều cạnh a, H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp AD, SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

M, N lần lượt là trung điểm AB, CD mà tứ giác $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AN // CM$.

$\Rightarrow CM\ //\left(SAN\right)\Rightarrow d\left(SA,CM\right)=d\left(CM,\left(SAN\right)\right)=d\left(C,\left(SAN\right)\right)$.

Gọi $I=AN\cap CH\Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác $ADC\Rightarrow IC=2HI$.

$HC\cap\left(SAN\right)=I\Rightarrow\dfrac{d\left(C,\left(SAN\right)\right)}{d\left(H,\left(SAN\right)\right)}=\dfrac{CI}{HI}=2\Rightarrow d\left(C,\left(SAN\right)\right)=2d\left(H,\left(SAN\right)\right)$.

Có $\left.\begin{matrix}\left(SAD\right)\perp\left(ABCD\right)\\ \left(SAD\right)\cap\left(ABCD\right)=AD\\ SH\perp AD,SH\subset\left(SAD\right)\end{matrix}\right\}\Rightarrow SH\perp\left(ABCD\right)$.

Trong $\left(ABCD\right)$ kẻ $HE\perp AN,E\in AN$.

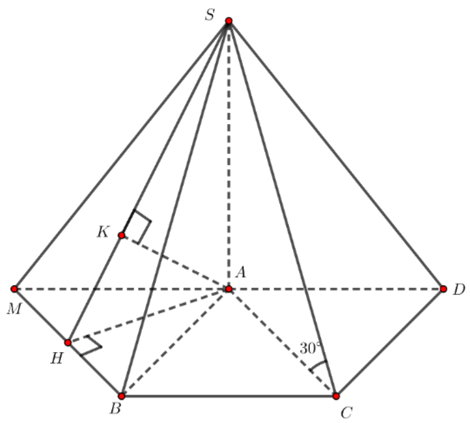
Trong $\left(SHE\right)$ kẻ $HF\perp SE,F\in SE\ \Rightarrow HF\perp\left(SAN\right)\Rightarrow h=d\left(H,\left(SAN\right)\right)=HF$.

$\Delta AEH\backsim\Delta ADN\Rightarrow\dfrac{HE}{DN}=\dfrac{HA}{NA}\Rightarrow HE=\dfrac{HA.DN}{NA}=\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$.

ΔSHE vuông tại H, HF là đường cao $\Rightarrow\dfrac{1}{HF^2}=\dfrac{1}{HS^2}+\dfrac{1}{HE^2}\Rightarrow HF=\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$.

$\Rightarrow d\left(C,\left(SAN\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 18. Chọn D



Dựng $BM\ //\ AC$, khi đó $d\left(AC,SB\right)=d\left(AC,(SBM)\right)=d\left(A,\left(SBM\right)\right)$.

Dựng $AH\perp MB,AK\perp SH\Rightarrow AK\perp\left(SBM\right)\Rightarrow d\left(A,\left(SBM\right)\right)=AK$.

Hình chữ nhật $ABCD$, $AB=a,AD=2a\Rightarrow AC=a\sqrt{5}$.

$SA\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow\left(SC,\left(ABCD\right)\right)=SCA\Rightarrow SCA=30^o$.

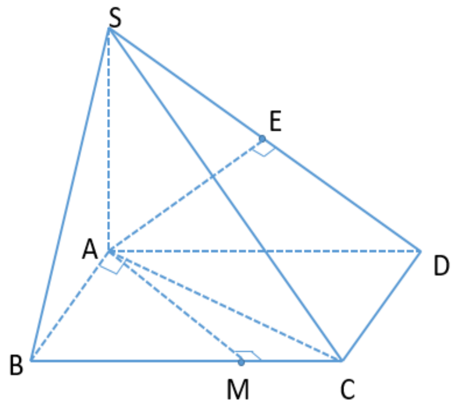
Tam giác SAC vuông tại A, $AC=a\sqrt{5},SCA=30^o\Rightarrow SA=\dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

Tam giác ABM vuông tại A, $AH\perp BM\Rightarrow AH=\dfrac{AM.AB}{MB}=\dfrac{2a.a}{a\sqrt{5}}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác SAH vuông tại A, $AK\perp SH\Rightarrow\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AH^2}\Rightarrow AK=\dfrac{2a\sqrt{185}}{37}$.

Vậy $d\left(AC,SB\right)=\dfrac{2a\sqrt{185}}{37}$.

Câu 19. Chọn D



Dễ dàng chứng minh được $\triangle ABC$ vuông tại A. Do $BM=2MC$ nên $MC=\dfrac{1}{3}BC=a$.

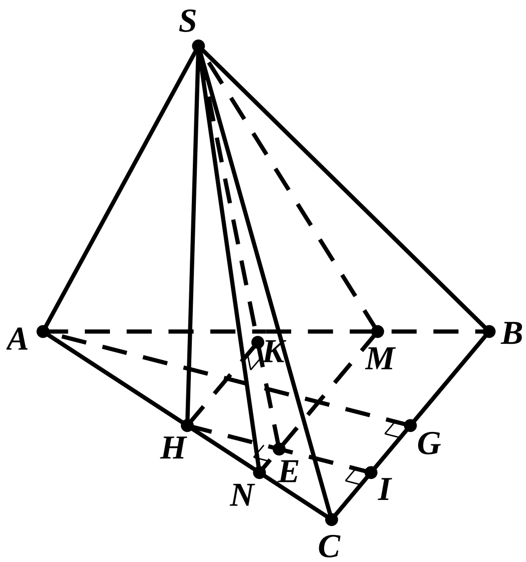
Từ $BC.MC=3a.a=3a^2=AC^2$ và $\triangle ABC$ vuông tại A ta suy ra được $AM\perp BC$ hay $AM\perp AD$.

Vì $SA\perp\left(ABCD\right)$ nên $AM\perp SA$, kết hợp $AM\perp AD$ suy ra $AM\perp\left(SAD\right)$.

Trên mặt phẳng $\left(SAD\right)$, kẻ AE vuông góc với SD tại E. Khi đó ta có $AM\perp AE$. Do vậy $d\left(AM,SD\right)=AE$.

Ta có $SA=AD=3a$, $SA\perp AD$ suy ra $AE=\dfrac{1}{2}SD=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 20. Chọn D



Gọi N là trung điểm của HC, kết hợp với giả thiết ta có $MN//BC$. Suy ra $BC//\left(SMN\right)$.

Khi đó $d\left(SM;BC\right)=d\left(BC;\left(SMN\right)\right)=d\left(C;\left(SMN\right)\right)=d\left(H;\left(SMN\right)\right)$.

Trong mặt đáy, kẻ $HE \perp MN, E \in MN$, suy ra $MN \perp (SHE)$. Do đó hai mặt phẳng (SHE) và (SMN) vuông góc nhau và cắt nhau theo giao tuyến SE. Trong mặt phẳng (SHE), kẻ HK vuông góc với SE tại K ta được $HK = d(H(SMN))$.

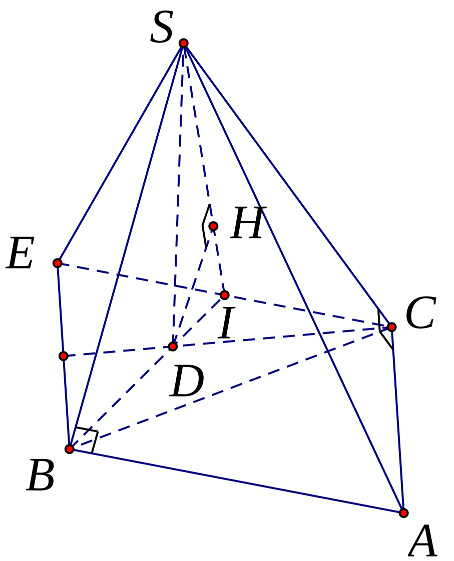
Gọi G là trung điểm BC, suy ra $AG \perp BC$ và $AG = a\sqrt{3}$.

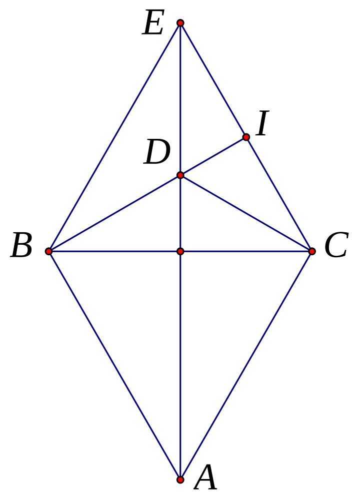
Ta thấy HE kéo dài cắt BC tại trung điểm I của CG và do đó $HE = \frac{1}{2}HI = \frac{1}{4}AG = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Xét tam giác vuông SHE, ta có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HE^2} \Rightarrow HK = a\sqrt{\frac{12}{67}}$.

Vậy $d(SM;BC) = a\sqrt{\frac{12}{67}}$.

Câu 21. Chọn B





Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), suy ra $SD \perp (ABC)$.

Ta có $SD \perp AB$ và $SB \perp AB$ (gt), suy ra $AB \perp (SBD) \Rightarrow BA \perp BD$.

Tương tự có $AC \perp DC$ hay tam giác ACD vuông ở C.

Dễ thấy $\Delta SBA = \Delta SCA$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông), suy ra $SB = SC$.

Từ đó ta chứng minh được $\Delta SBD = \Delta SCD$ nên cũng có $DB = DC$.

Vậy DA là đường trung trực của BC, nên cũng là đường phân giác của góc BAC.

Ta có $DAC = 30°$, suy ra $DC = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Ngoài ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là $SBD = 60°$, suy ra $\tan SBD = \frac{SD}{BD} \Rightarrow SD = BD \tan SBD = \frac{a}{\sqrt{3}}.\sqrt{3} = a$.

Dựng hình bình hành $ABEC$, do tam giác ABC là tam giác đều nên tam giác BEC đều.

Có $CBD = ABD - ABC = 90° - 60° = 30°$ nên BD là phân giác trong của góc CBE.

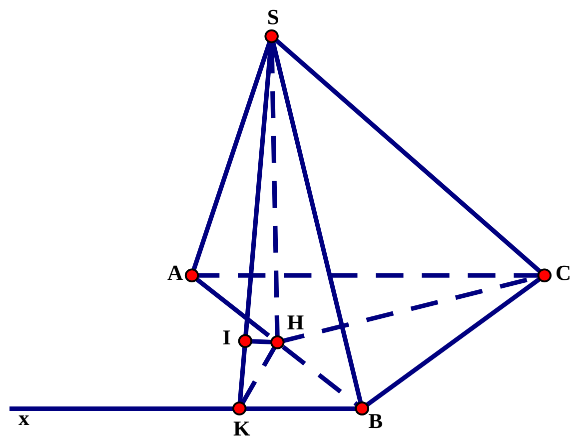
Gọi I là trung điểm của EC thì $BI \perp EC$.

Kẻ $DH \perp SI$ tại H, ta có: $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{SD^2} + \dfrac{1}{DI^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{13}{a^2} \Rightarrow DH = \dfrac{a}{\sqrt{13}}$

$\Rightarrow d\left(D;(SCE)\right) = \dfrac{a}{\sqrt{13}}$.

Có $AB // (SEC) \Rightarrow d(AB, SC) = d\left(AB;(SCE)\right) = d\left(B;(SCD)\right) = \dfrac{BI}{DI} d\left(D;(SCE)\right) = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$.

Câu 22. Chọn B



Ta có SH vuông góc với (ABC) nên suy ra góc giữa SC và đáy (ABC) là góc $SCH = 60°$.

$CH = AC.\sin HAC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = CH.\tan 60° = \dfrac{3a}{2}$.

Kẻ Bx song song vớ AC suy ra $AC \| (SBx)$.

$\Rightarrow d(AC, SB) = d\left(AC,(SBx)\right) = d\left(A,(SBx)\right) = 2d\left(H,(SBx)\right)$.

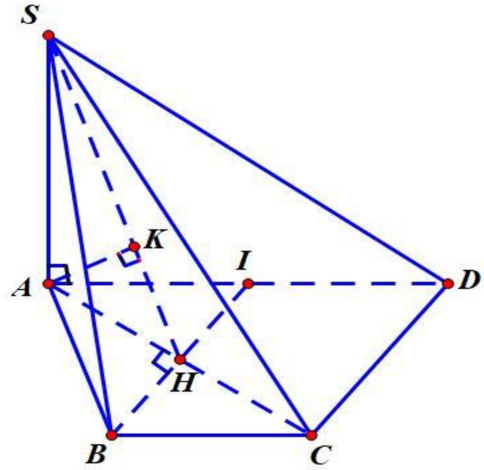
Từ H kẻ $HK \perp Bx \Rightarrow Bx \perp (SHK) \Rightarrow (SHK) \perp (SBx)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (SHK) \perp (SBx) \\ (SHK) \cap (SBx) = SK \Rightarrow HI = d\left(H,(SBx)\right) \\ HI \perp SK \end{cases}.$$

$HK = HB.\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{4}{9a^2} + \dfrac{16}{3a^2} = \dfrac{52}{9a^2} \Rightarrow HI = \dfrac{3a}{\sqrt{52}}$.

$\Rightarrow d\left(H,(SBx)\right) = HI = \dfrac{3a}{\sqrt{52}} \Rightarrow d(SB, AC) = 2HI = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$.

Câu 23. Chọn D



Gọi I là trung điểm AD, H là giao điểm của AC và BI. Ta có $CD // BI$ nên H là trung điểm của AC và $d(CD,SB) = d(CD,(SBI)) = d(C,(SBI)) = d(A,(SBI))$.

Kẻ $AK \perp SH$ tại K (1). Khi đó, $\begin{cases} BI // CD \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BI \perp AH$.

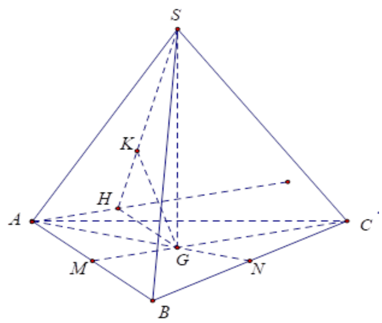
Ta lại có, $BI \perp SA$ nên $BI \perp (SAH) \Rightarrow BI \perp AK$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $AK \perp (SBI)$ nên $d(A,(SBI)) = AK$.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{5}{3a^2}$ nên $AK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Vậy $d(CD,SB) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 24. Chọn A



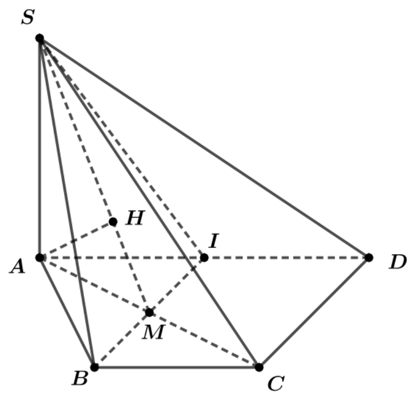
Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của hai cạnh *AB* và *BC*. Gọi *H* là hình chiếu của *G* lên đường thẳng đi qua *A* và song song với *CG*. *GK* là đường cao của tam giác *GHS*.
Khi đó, $d(GC,SA) = d(GC,(SAH)) = GK$.

Ta có $AHGM$ là hình chữ nhật và $AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;

$SA,(ABC) = SAG = 60^0 \Rightarrow SG = AG.\tan 60^0 = a,\ GH = AM = \dfrac{a}{2}$, suy ra

$d(GC,SA) = GK = \dfrac{GS.GH}{\sqrt{GS^2 + GH^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 25. Chọn B



Gọi I là trung điểm AD. Ta có $BCDI$ là hình bình hành nên $BI // CD$.

Suy ra $CD // (SBI)$ nên $\mathrm{d}(CD, BI) = \mathrm{d}(CD,(SBI)) = \mathrm{d}(D,(SBI))$.

Ta có: $AD \cap (SBI) = I \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(D,(SBI))}{\mathrm{d}(A,(SBI))} = \dfrac{DI}{AI} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{d}(D,(SBI)) = \mathrm{d}(A,(SBI))$.

Vì $ABCD$ là nửa lục giác nội tiếp hình tròn tâm I nên $ACD = 90° \Rightarrow AC \perp CD$.

Suy ra $AM \perp BI$, mà $SA \perp BI$ nên $BI \perp (SAM) \Rightarrow (SBI) \perp (SAM)$.

Ta lại có $(SBI) \cap (SAM) = SM$ nên trong (SAM) kẻ $AH \perp SM$ thì $AH \perp (SBI)$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ là AC.

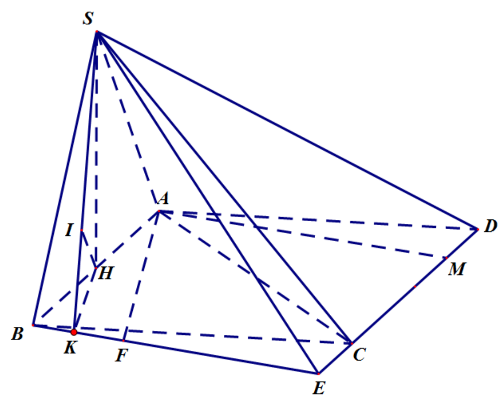
$\Rightarrow (SC,(ABCD)) = (SC, AC) = SCA = 45° \Rightarrow SA = AC = CD.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Dễ thấy ΔABI đều cạnh a nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔSAM vuông tại A: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(CD, BI) = \mathrm{d}(D,(SBI)) = \mathrm{d}(A,(SBI)) = AH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 26. Chọn A.



Ta có: $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ \text{Trong } (SAB),\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Theo giả thiết ta có: $AB = BC = 4a$ và $BAD = 120^0 \Rightarrow ABD = 30^0 \Rightarrow ABC = 60^0$ nên ΔABC là tam giác đều, cạnh $4a$.

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{(4a)^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}a^2$ và $SH = \dfrac{4a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}a$.

Ta có: $AM^2 = AD^2 + DM^2 - 2AD.DM.\cos ADM = (4a)^2 + a^2 - 2.4a.a.\cos 60° = 13a^2$.

$\Rightarrow AM = a\sqrt{13}$.

Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CE = a$.

Khi đó, tứ giác $AMEB$ là hình bình hành $\Rightarrow BE = AM = a\sqrt{13}$.

Mặt khác, $\Delta ADM = \Delta BCE \Rightarrow S_{AMEB} = S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2.4\sqrt{3}a^2 = 8\sqrt{3}a^2$.

Ta có: $\begin{cases} AM \not\subset (SBE) \\ AM // BE \\ BE \subset (SBE) \end{cases} \Rightarrow AM // (SBE)$.

Do đó $\mathrm{d}(AM, SB) = \mathrm{d}(AM, (SBE)) = \mathrm{d}(A, (SBE))$.

Ta lại có: $\dfrac{\mathrm{d}(A,(SBE))}{\mathrm{d}(H,(SBE))} = \dfrac{AB}{HB} = 2 \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBE)) = 2\mathrm{d}(H,(SBE))$.

Trong $(ABCD)$, gọi K và F lần lượt là hình chiếu của H và A lên BE.

$\Rightarrow HK = \dfrac{1}{2}AF = \dfrac{1}{2}.\dfrac{S_{AMEB}}{EB} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{8\sqrt{3}a^2}{a\sqrt{13}} = \dfrac{4\sqrt{39}a}{13}$ (do HK là đường trung bình của ΔABF).

Ta có: $\begin{cases} BE \perp HK \\ BE \perp SH \ (\text{Do } SH \perp (ABCD) \supset BE) \\ HK, SH \subset (SHK) \\ HK \cap SH = H \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SHK)$.

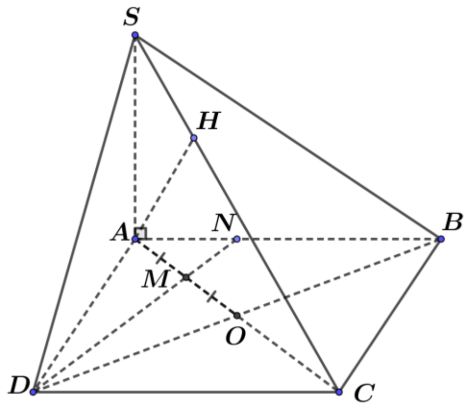
Mà $BE \subset (SBE) \Rightarrow (SBE) \perp (SHK)$. Ta lại có: $(SBE) \cap (SHK) = SK$

Trong (SHK), kẻ $HI \perp SK\ (I \in SK) \Rightarrow HI \perp (SBE) \Rightarrow \mathrm{d}(H,(SBE)) = HI$.

Tam giác SHK vuông tại H, đường cao HI nên $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{(2\sqrt{3}a)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{4\sqrt{39}a}{13}\right)^2} = \dfrac{17}{48a^2}$.

Do đó: $HI = \dfrac{4\sqrt{51}}{17}a$. Vậy $d(AM, SB) = \dfrac{8\sqrt{51}}{17}a$.

Câu 27. Chọn B



Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABO$ với cát tuyến DMN ta có: $\dfrac{AM}{OM}.\dfrac{AN}{BN}.\dfrac{DO}{DB}=1\Rightarrow\dfrac{AN}{BN}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{NB}{AB}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow \mathrm{d}\left(N,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{2}{3}\mathrm{d}\left(A,\left(SBC\right)\right)$

Xét $\triangle ABC$ có $AB^2=CD^2=5a^2; AC^2+BC^2=4a^2+a^2=5a^2\Rightarrow\triangle ABC$ vuông tại $C\Rightarrow AC\perp BC$

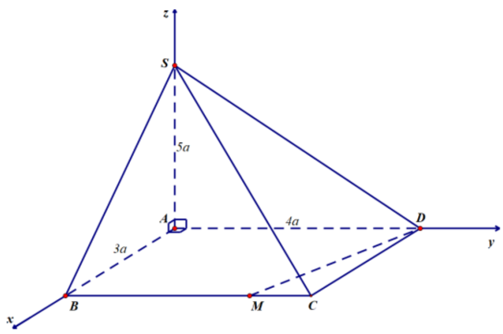
$SA\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SA\perp BC$. Suy ra $BC\perp\left(SAC\right)$

Kẻ $AH\perp SC$, ta có $BC\perp\left(SAC\right)\Rightarrow BC\perp AH$ nên $AH\perp\left(SBC\right)\Rightarrow AH=\mathrm{d}\left(A,\left(SBC\right)\right)$

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AC^2}\Rightarrow AH=\dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{a.2a}{\sqrt{a^2+4a^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}a$

Vậy $\mathrm{d}\left(N,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{2}{3}\mathrm{d}\left(A,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{\sqrt{5}}a=\dfrac{4\sqrt{5}}{15}a$.

Câu 28. Chọn D



Từ giả thiết ta có $BM=3a$, ta giải bằng cách gắn hệ trục tọa độ như sau:

Chọn hệ trục tọa độ đềcác vuông góc $Oxyz$ thỏa $O\equiv A$, điểm B nằm trên Ox, điểm D nằm trên Oy, điểm S nằm trên Oz như hình vẽ:

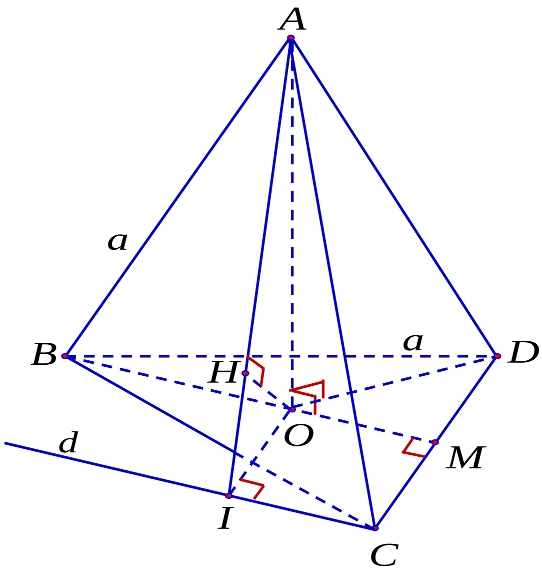
Từ giả thiết ta có tọa độ các điểm $B(3a;0;0), D(0;4a;0), S(0;0;5a)$ và $M(3a;3a;0)$ suy ra tọa độ các vectơ $\overrightarrow{SB}=(3a;0;-5a), \overrightarrow{MD}=(-3a;a;0), \overrightarrow{BM}=(0;3a;0)$

Tích có hướng $\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{MD}\right]=(5a^2;15a^2;3a^2)$

Vận dụng công thức tính khoảng cách

$$d(SB,MD)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{MD}\right].\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{MD}\right]\right|}=\frac{45a^3}{a^2\sqrt{259}}=\frac{45a}{\sqrt{259}}.$$

Câu 29. Chọn A



Gọi O là tâm của tam giác BCD.

Qua C kẻ đường thẳng d song song với BM.

Khi đó $d\left(AC,\ BM\right)=d\left(BM,\ \left(AC,d\right)\right)=d\left(O,\ \left(AC,d\right)\right)$.

Do tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều $\Rightarrow AO\perp\left(BCD\right)$.

Kẻ $OI\perp d$ và $I\in d$, $OH\perp AI$ và $H\in AI \Rightarrow OH\perp\left(AC,d\right)$. Suy ra $d\left(O,\ \left(AC,d\right)\right)=OH$.

Ta có $d\ //\ BM \Rightarrow d\perp CD$. Tứ giác $IOMC$ là hình chữ nhật, suy ra $IO=MC=\dfrac{a}{2}$.

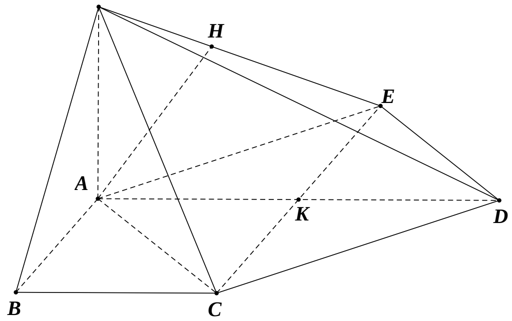
BM là đường cao trong tam giác đều cạnh bằng a $\Rightarrow BM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow BO=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $AO=\sqrt{AB^2-BO^2}\Rightarrow AO=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Do đó ta có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OI^2}\Rightarrow OH=\dfrac{OA.OI}{\sqrt{OA^2+OI^2}}\Rightarrow OH=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\dfrac{a}{2}}{\sqrt{\dfrac{2a^2}{3}+\dfrac{a^2}{4}}}=\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.

Vậy $d\left(AC,BM\right)=\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 30 Chọn C



Kẻ $CK\perp AD$. Ta có $CK=a$, $AK=BC=a\Rightarrow KD=a$.

$AC = a\sqrt{2}$, $CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = a\sqrt{2}$; $AC^2 + CD^2 = AD^2 \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C.

Dựng hình chữ nhật $ACDE$, kẻ $AH \perp SE$ tại H.

Ta có $DE \perp AE$ và $DE \perp SA$ nên $DE \perp (SAE) \Rightarrow DE \perp AH$.

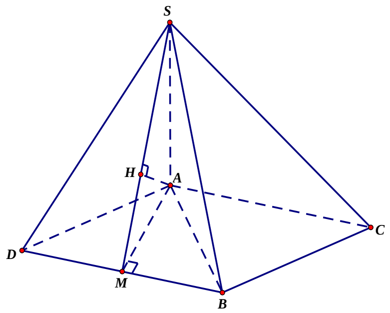
$DE \perp AH$ và $SE \perp AH$ nên $AH \perp (SDE)$ tại H. Suy ra $d(A,(SDE)) = AH$.

Ta có $AC // (SDE) \Rightarrow d(AC, SD) = d(AC,(SDE)) = d(A,(SDE)) = AH$.

Trong tam giác SAE vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 31.Chọn B



Vì $SA \perp (ABC)$ nên $(SB,(ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA} \Rightarrow \widehat{SBA} = 75°$.

$SA = AB.\tan \widehat{SBA} = a.\tan 75° = a(2+\sqrt{3})$. Dựng hình bình hành $ACBD$, ta có $AC // (SBD)$ nên: $d(AC, SB) = d(AC,(SBD)) = d(A,(SBD))$.

Gọi M là trung điểm BD, suy ra $BD \perp AM$.

Từ $SA \perp (ABC)$ ta có $BD \perp SA$, do đó $BD \perp (SAM)$. Kẻ $AH \perp SM$ ($H \in SM$) thì $BD \perp AH$

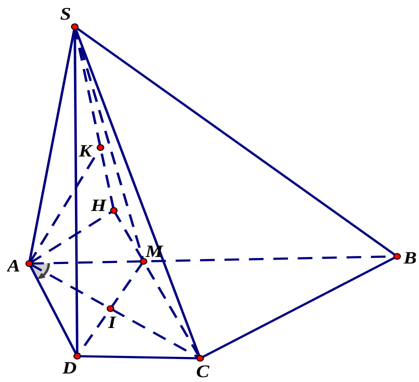
Từ $BD \perp AH$ và $AH \perp SM$ suy ra $AH \perp (SBD)$ nên $d(A,(SBD)) = AH$.

Tam giác ABD đều cạnh a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Trong tam giác SAM vuông tại A, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(a\left(2+\sqrt{3}\right)\right)^2} = \frac{25-12\sqrt{3}}{3a^2} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{3}{25-12\sqrt{3}}}a \approx 0.844a.$$

Vậy $d(AC, SB) = d(A,(SBD)) = AH \approx 0.844a$.

Câu 32.Chọn A



Do $AB = 3AM = 3a$ nên $AM = a \Rightarrow AD = DC = AM = a$.

Do $AM//DC$ và $AM = CD = AD = a$ nên $AMCD$ là hình thoi có cạnh bằng a.

Suy ra $\begin{cases} CM = a \\ AD//CM \end{cases} \Rightarrow AD//\left(SCM\right) \Rightarrow d\left(AD, SM\right) = d\left(AD, \left(SCM\right)\right) = d\left(A, \left(SCM\right)\right)$.

Kẻ $AH \perp CM, \left(H \in CM\right)$, $AK \perp SH, \left(K \in SH\right)$.

Ta có $SA \perp \left(ABCD\right) \Rightarrow SA \perp CM$ mà $CM \perp AH$ suy ra $CM \perp \left(SAH\right) \Rightarrow CM \perp AK$.

Do $AK \perp AH, AK \perp CM$ nên $AK \perp \left(SMC\right) \Rightarrow AK = d\left(A, \left(SCM\right)\right)$.

Do $AM = AD = a, MAD = 60^0$ nên ΔMAD là tam giác đều cạnh bằng a $\Rightarrow AC = 2AI = a\sqrt{3}$ với I là tâm hình thoi $AMCD$.

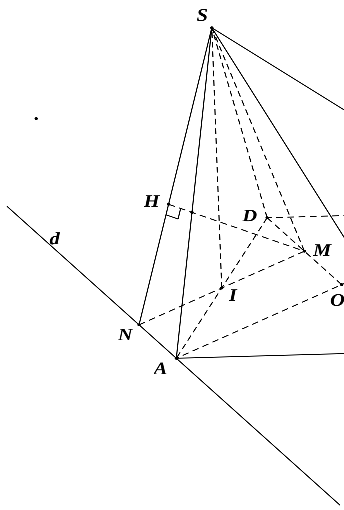
Ta có $S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}.MI.AC = \frac{1}{2}AH.MC \Rightarrow AH = \frac{MI.AC}{MC} = \frac{\frac{a}{2}.a\sqrt{3}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔSAH vuông tại A có $AK \perp SH$. Theo tính chất đường cao tam giác vuông,

Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $d\left(AD, SM\right) = d\left(AD, \left(SCM\right)\right) = d\left(A, \left(SCM\right)\right) = AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 33.



Chọn D

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BD. Gọi O là giao điểm AC và BD; I, M lần lượt là trung điểm AD và OD; N là giao điểm d và IM. Nên $BD//d \Rightarrow BD//(SA,d)$

$\Rightarrow d(SA,BD) = d(BD,(SA,d)) = d(M,(SA,d))$

Trong $mp(SMN)$ kẻ $MH \perp SN$ (1), $(H \in SN)$. Theo giả thiết :

$\left.\begin{matrix} SI \perp AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp d$ (*)

Mặt khác ta có : $\left.\begin{matrix} d//BD \\ BD \perp AO \\ AO//MN \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \perp MN$ (**)

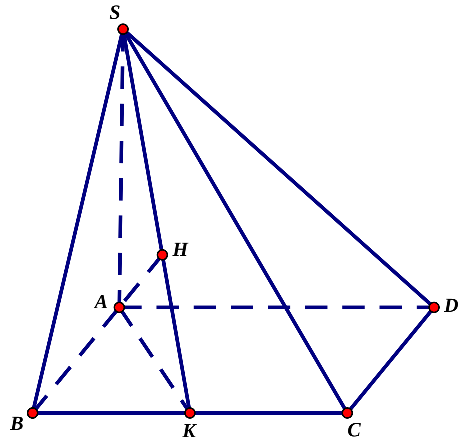
Từ (*),(**) suy ra $d \perp (SMN) \Rightarrow d \perp MH$ (2). Từ (1),(2) suy ra $MH \perp (SA,d)$.

Xét tam giác SMN có: $S_{\Delta SMN}=\frac{1}{2}MH.SN=\frac{1}{2}SI.MN \Rightarrow MH=\frac{SI.MN}{SN}$

Với $SI=\frac{a\sqrt{3}}{2}, MN=AO=\frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow IN=\frac{1}{2}MN=\frac{a\sqrt{2}}{4}, SN=\sqrt{SI^2+IN^2}=\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Do đó $MH=\frac{SI.NM}{SN}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$. Vậy $d(SA,BD)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 34.Chọn A



$ABDC$ là hình thoi nên $AD//BC$. Suy ra $AD//(SBC)$.

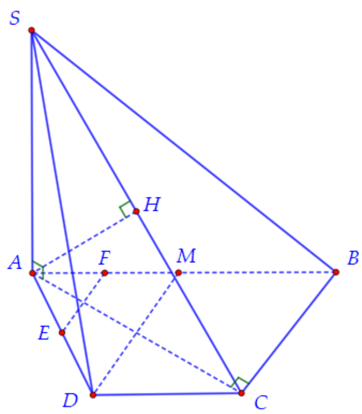
Khi đó $d(SB,AD)=d(AD,(SBC))=d(A,(SBC))$

(Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên SK).

Khi đó $AH\perp(SBC)$, suy ra $d(A,(SBC))=AH$.

Tam giác ABC cân tại B và $ABC=60^0$ nên tam giác ABC là tam giác đều. Suy ra $AK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta có $SA=AD.\tan 30°=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Vậy $AH=\frac{AK.SA}{\sqrt{AK^2+SA^2}}=\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 35. Chọn B



Gọi M là trung điểm AB

Ta có $BCDM$ là hình bình hành (vì CD song song và bằng BM) nên $DM=BC=\frac{1}{2}AB$ suy ra tam giác ADB vuông tại D. Tương tự tam giác ACB vuông tại C.

Vì $\begin{cases} EF//DM \\ DM//CB \end{cases} \Rightarrow EF//CB \Rightarrow EF//\ \ SBC$

$\Rightarrow d\ \ EF, SB\ = d\ \ EF,\ SBC\ \ = d\ \ F,\ SBC\ \ = \dfrac{3}{4} d\ \ A,\ SBC$

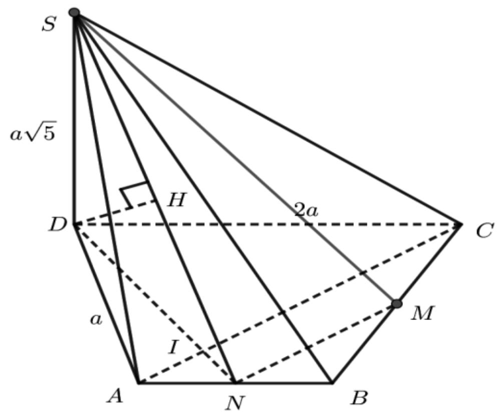
Ta có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp\ \ SAC\ \ \Rightarrow\ \ SBC\ \ \perp\ \ SAC\ \ ,$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SC thì $AH \perp\ \ SBC\ \ \Rightarrow d\ \ A,\ BC\ \ = AH$.

Trong tam giác vuông SAC ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{9a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{9a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{3a}{2}$

Vậy $d\ \ SB, EF\ \ = \dfrac{9a}{8}$.

Câu 36. Chọn D



Gọi N là trung điểm của AB. Suy ra MN là đường trung bình của ΔABC.

$\Rightarrow d\left(AC, SM\right) = d\left(AC, \left(SMN\right)\right) = d\left(I, \left(SMN\right)\right)$ (với $I = DN \cap AC$)

Ta có

$ID \cap \left(SMN\right) = N \Rightarrow \dfrac{d\left(I, \left(SMN\right)\right)}{d\left(D, \left(SMN\right)\right)} = \dfrac{IN}{DN} = \dfrac{1}{5}$ (do $AN // CD \Rightarrow \dfrac{IN}{ID} = \dfrac{AN}{CD} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{IN}{DN} = \dfrac{1}{5}$)

$\Rightarrow d\left(I, \left(SMN\right)\right) = \dfrac{1}{5} d\left(D, \left(SMN\right)\right)$. Xét ΔADN và ΔDCA có: $D = A = 90^\circ$

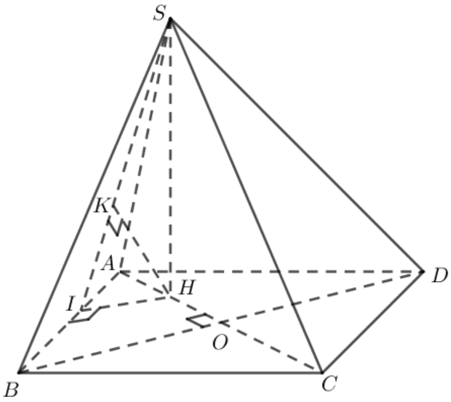
$\dfrac{AN}{AD} = \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \Delta ADN$” $\Delta DCA\left(c-g-c\right) \Rightarrow ADN = DCA \Rightarrow DN \perp AC \Rightarrow MN \perp \left(SDN\right)$.

Ta có

$\begin{cases} \left(SMN\right) \perp \left(SDN\right) \\ \left(SMN\right) \cap \left(SDN\right) = SN \\ Trong\left(SDN\right), DH \perp SN \end{cases} \Rightarrow d\left(D, \left(SMN\right)\right) = DH$

ΔSDN vuông tại D: $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{SD^2} + \dfrac{1}{DN^2} \Rightarrow DH = a \Rightarrow d\left(I, \left(SMN\right)\right) = \dfrac{1}{5} d\left(D, \left(SMN\right)\right) = \dfrac{a}{5}$.

Câu 37.Chọn D



Gọi H là trung điểm của AO. Theo giả thiết: $SH \perp (ABCD)$.

Ta có: $CD//AB \Rightarrow CD//(SAB) \Rightarrow d(SA,CD) = d(CD,(SAB)) = d(C,(SAB))$.

Mặt khác: $\dfrac{d(C,(SAB))}{d(H,(SAB))} = \dfrac{CA}{HA} = 4 \Rightarrow d(C,(SAB)) = 4d(H,(SAB))$.

Trong $(ABCD)$, kẻ $HI \perp AB$ tại I; kẻ $HK \perp SI$ tại K.

Khi đó: $d(H,(SAB)) = HK$.

Tam giác SHI vuông tại H nên: $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HI^2}$ (1)

Hình thoi có $ABC = 60°$ nên tam giác ABC đều $\Rightarrow AC = a; BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác AIH đồng dạng tam giác $AOB \Rightarrow \dfrac{IH}{OB} = \dfrac{AH}{AB} \Rightarrow IH = \dfrac{OB.AH}{AB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{4}}{a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{8}$ (2)

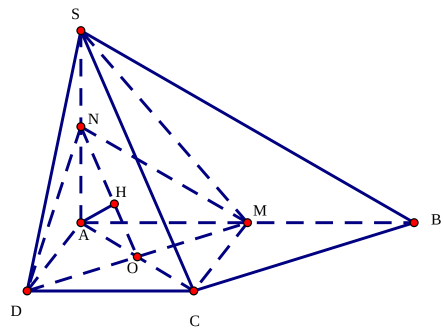
Tam giác SAB đều nên $SA = SB = AB = a$.

Tam giác SAH vuông tại H nên $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{4}$ (3)

Thay (2) và (3) vào (1) ta được: $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{8}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{15}}{4}\right)^2} = \dfrac{112}{5a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{560}}{112}$.

Vậy $d(C,(SAB)) = 4d(H,(SAB)) = 4.\dfrac{a\sqrt{560}}{112} = \dfrac{a\sqrt{560}}{28}$.

Câu 38.Chọn A



Ta có $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}$; $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(a+2a).a=\frac{3a^2}{2}$

Suy ra $SA=\frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}}=\frac{3a^3\sqrt{6}}{2}.\frac{2}{3a^2}=a\sqrt{6}$.

Gọi M là trung điểm của AB, O là giao điểm của AC và DM.

Ta có tứ giác $ADCM$ là hình vuông cạnh a.

Ta có (DNM) chứa ON và $ON//SC$ nên $SC//(DNM)$.

Suy ra nên $d(SC,DN)=d(SC,(DMN))=d(C,(DMN))=d(A,(DMN))$.

Trong (SAC) kẻ $AH\perp NO$. Ta có $DM\perp AC$ và $DM\perp SA$ nên $DM\perp(SAC)$.

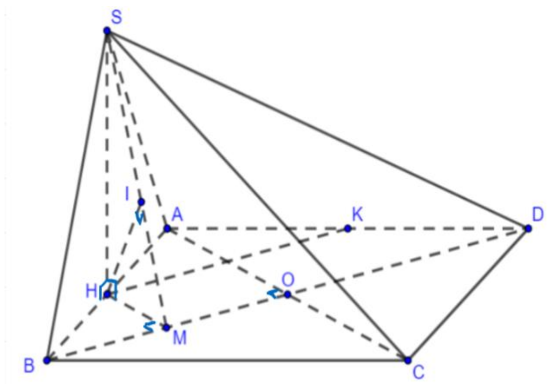
Khi đó ta có $\left.\begin{array}{l} AH\perp NO \\ AH\perp DM\,(DM\perp(SAC)) \end{array}\right\}\Rightarrow AH\perp(DMN)$

$\Rightarrow d(A,(DMN))=AH$.

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AO^2}$; $AN=\frac{a\sqrt{6}}{2}$; $AO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{\frac{a^2}{2}}+\frac{1}{\frac{3a^2}{2}}=\frac{8}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $d(SC,DN)=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 39.Chọn C



Ta có $HK//BD\Rightarrow HK//(SBD)\Rightarrow d(HK,SD)=d(HK,(SBD))=d(H,(SBD))$.

Dựng $HM\perp BD$. Ta có $\begin{cases} BD\perp HM \\ BD\perp SH \end{cases}\Rightarrow BD\perp(SHM)$.

Dựng $HI\perp SM$. Ta có $\begin{cases} HI\perp SM \\ HI\perp BD \end{cases}\Rightarrow HI\perp(SBD)\Rightarrow d(H,(SBD))=HI$.

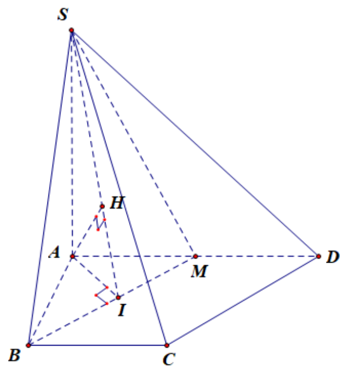
$HM=\frac{AO}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{4}, HD=\sqrt{AH^2+AD^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}, SH=\sqrt{SD^2-HD^2}=a\sqrt{7}$.

Xét ΔSHM vuông tại H, ta có

$\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{HS^2}+\frac{1}{HM^2}=\frac{1}{(a\sqrt{7})^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{57}{7a^2}\Rightarrow HI=\frac{a\sqrt{399}}{57}$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và HK là $\frac{a\sqrt{399}}{57}$.

Câu 40.Chọn A



Do $ABCD$ là hình thang có $AB = BC = a;\ AD = 2a$ và M là trung điểm của AD nên ta có $BM\,//\,CD \Rightarrow CD\,//\left(SBM\right)$.

Do đó $d\left(SM,CD\right) = d\left(CD,\left(SBM\right)\right) = d\left(D,\left(SBM\right)\right) = d\left(A,\left(SBM\right)\right)$.

Ta kẻ $AI \perp BM$, lại có $SA \perp BM \ \Rightarrow \left(SAI\right) \perp \left(SBM\right)$.

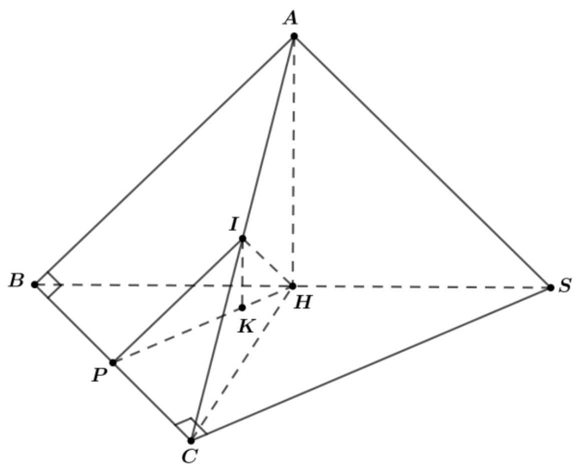
Ta có $\left(SAI\right) \cap \left(SBM\right) = SI$. Kẻ $AH \perp SI \Rightarrow AH \perp \left(SBM\right)$ hay $d\left(A,\left(SBM\right)\right) = AH$.

Xét tam giác SAI có $SA = 2a;\ AI = \frac{1}{2}BM = \frac{a\sqrt{2}}{2},\ SAI = 90^0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{\left(2a\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{3}.$$

Vậy $d\left(SM,CD\right) = d\left(A,\left(SBM\right)\right) = AH = \frac{2a}{3}$.

Câu 41. Chọn C



Gọi I là trung điểm của AC, H là trung điểm của SB, P là trung điểm của BC.

Ta có ΔSAB, ΔSCB vuông tại A và C nên $HS = HA = HB = HC$ và $IA = IB = IC$.

Từ đó suy ra $IH \perp \left(ABC\right) \Rightarrow IH \perp BC$ mà $IP \perp BC$ suy ra $BC \perp \left(IHP\right)$.

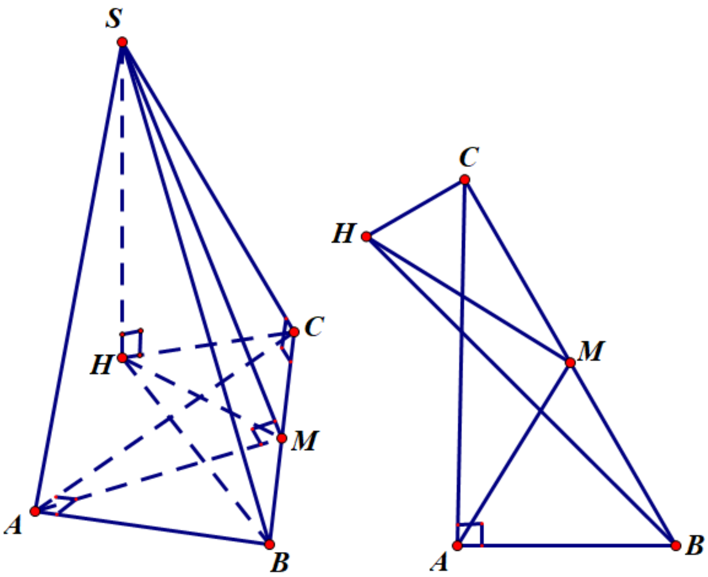
Kẻ $IK \perp HP \Rightarrow IK \perp (SBC) \Rightarrow IK = d\left(I,(SBC)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(A,(SBC)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $\dfrac{1}{IK^2} = \dfrac{1}{IH^2} + \dfrac{1}{IP^2} \Rightarrow \dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{8}{a^2} \Rightarrow IH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow PH = \sqrt{IP^2 + IH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Suy ra $SC = 2PH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{2}.BC.SC = \dfrac{1}{2}.a.\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}d\left(A,(SBC)\right).S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{6}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 42. Chọn A.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC). Suy ra $\left(SB,(ABC)\right) = SBH = 60^0$.

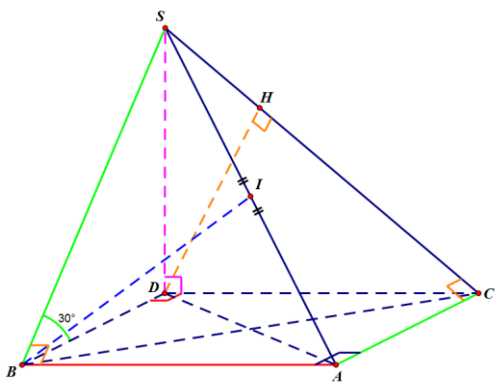
Do $SCB = SMA = 90^0$ nên $BC \perp CH, AM \perp MH$.

Ta có ΔABM đều cạnh $2a$ và $AMH = 90^0$ nên $HMC = 30^0$.

Từ đó $CH = CM.\tan 30^0 = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3} \Rightarrow HB = \sqrt{CH^2 + BC^2} = \dfrac{2\sqrt{39}}{3}a$

$\Rightarrow SH = HB.\tan 60^0 = 2\sqrt{13}a$. Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \dfrac{4\sqrt{39}}{3}a^3$.

Câu 43. Chọn D

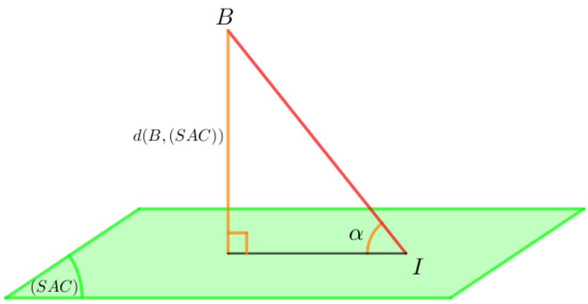


Ta có: I trung điểm SA là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ $\Rightarrow SBA = SCA = 90°$. Dựng hình chữ nhật $ABDC$.

Mà $\begin{cases} AB \perp BD \\ AB \perp SB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBD) \Rightarrow AB \perp SD$ (1) và $\begin{cases} AC \perp CD \\ AC \perp SC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SCD) \Rightarrow AC \perp SD$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $SD \perp (ABCD)$.

Mặt khác: $\begin{cases} (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SB \perp AB, SB \subset (SAB) \\ BD \perp AB, BD \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow ((SAB),(ABC)) = (SB, BD) = SBD = 30^\circ$.

Xét tam giác SBD có: $\tan SBD = \dfrac{SD}{BD} \Leftrightarrow \tan 30^\circ = \dfrac{SD}{4\sqrt{3}} \Rightarrow SD = 4\sqrt{3}a.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 4a$.



Đặt $AB = x$.

Ta có: $IB = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{1}{2}\sqrt{DB^2 + DC^2 + SD^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{64a^2 + x^2}$.

Gọi H là hình chiếu của D lên $SC \Rightarrow DH = \dfrac{SD.DC}{\sqrt{SD^2 + DC^2}} = \dfrac{4a.x}{\sqrt{16a^2 + x^2}}$.

Mặt khác: $\sin(IB,(SAC)) = \dfrac{d(B,(SAC))}{IB} = \dfrac{d(D,(SAC))}{IB} = \dfrac{DH}{IB}$

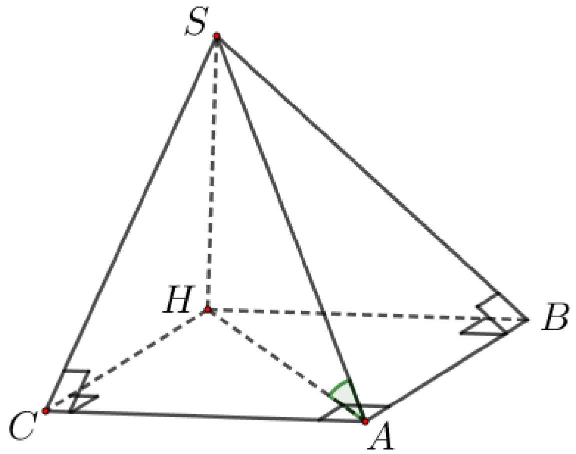
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{21}}{7}a = \frac{\dfrac{4a.x}{\sqrt{16a^2+x^2}}}{\dfrac{1}{2}\sqrt{64a^2+x^2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4\sqrt{3}a \Leftrightarrow AB = 4\sqrt{3}a \\ x = \dfrac{8\sqrt{3}a}{3} \Leftrightarrow AB = \dfrac{8\sqrt{3}a}{3} \end{array} \right..$$

Với $AB = \dfrac{8\sqrt{3}a}{3}$, $SB = 8a$, ta tính được $\tan ASB = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow ASB = 30^\circ$ (Loại).

Với $AB = 4\sqrt{3}a$, $SB = 8a$, ta tính được $\tan ASB = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ASB > 30^\circ$ (Nhận).

Mà: $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp SB \end{cases} \Rightarrow d(AC, SB) = AB = 4\sqrt{3}a$.

Câu 44. Chọn A



Trong mặt phẳng (ABC) dựng hình chữ nhật $ABHC$, khi đó ta có

$\begin{cases} AB \perp HB \\ AB \perp SB \end{cases} \Rightarrow AB \perp SH \ (1)$ và $\begin{cases} AC \perp CH \\ AC \perp SC \end{cases} \Rightarrow AC \perp SH \ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $SH \perp (ABC)$.

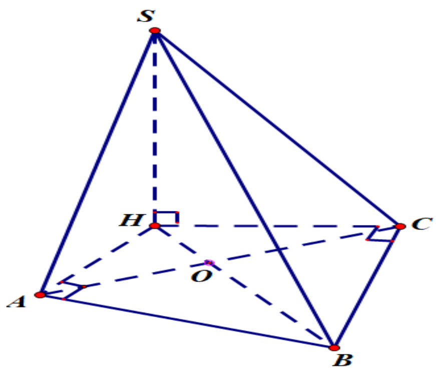
Nên ta có HA là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (ABC).

Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng SA, HA và bằng góc SAH nên suy ra $SAH = 45°$.

Theo cách dựng trên ta có $HA = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{5}$ và tam giác SAH vuông cân tại H nên $SH = HA = a\sqrt{5}$.

Ta cũng có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}a.2a = a^2$. Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{5}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{5}}{3}$.

Câu 45. Chọn A.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$SAB = SCB = 90^0 \Rightarrow HAB = HCB = 90^0$, $\left(SB,(ABC)\right) = 30^0 \Leftrightarrow \left(SB, HB\right) = SBH = 30^0$

Trong tam giác vuông SHB: $SH = SB.\sin 30^0 = a\sqrt{3}; HB = SB.\cos 30^0 = 3a$,

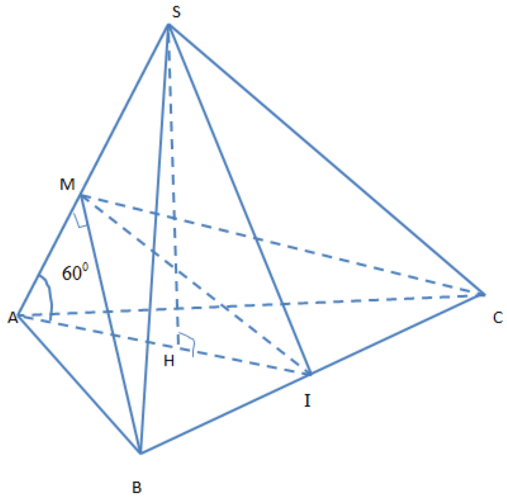
$\Rightarrow HA = \sqrt{HB^2 - AB^2} = a$

Ta có $\left((SBC),(ABC)\right) = 60^0 \Leftrightarrow \left(HC, SC\right) = SCH = 60^0 \Rightarrow HC = SH.\cot 60^0 = a; CB = 2a\sqrt{2}$.

Gọi O là giao điểm của AC, HB; trong tam giác HAB: $\frac{1}{AO^2}=\frac{1}{AH^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{9}{8a^2}$

$\Rightarrow AO=\frac{2\sqrt{2}a}{3}\Rightarrow OB=\frac{8a}{3}$. Vậy thể tích $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}OA.OB.SH=\frac{16\sqrt{6}a^3}{27}$

Câu 46. Chọn D



Dễ thấy $\Delta SAB=\Delta SAC\Rightarrow SB=SC$. Gọi I là trung điểm của BC.

Ta có: $\begin{cases} AI\perp BC \\ SI\perp BC \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAI)$. Kẻ $SH\perp AI\Rightarrow SH\perp(ABC)$.

Vậy $\left(SA,(ABC)\right)=SAH=SAI=60^0$

Kẻ $BM\perp SA$, do $BC\perp(SAI)\Rightarrow BC\perp SA$, vậy nên $SA\perp(MBC)$.

Tam giác IMA vuông tại M có $IA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$cos60^0=\frac{AM}{AI}\Rightarrow AM=AI.cos60^0=\frac{\sqrt{3}a}{4}$.

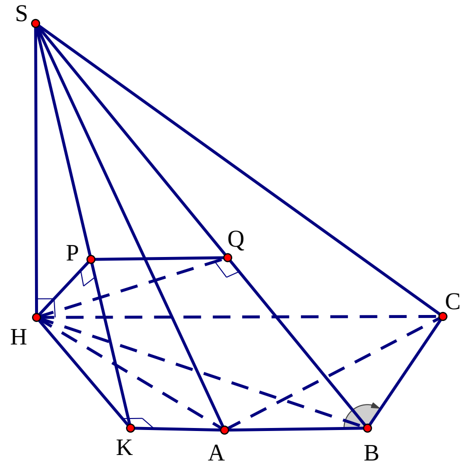
$\sin 60^0=\frac{IM}{AI}\Rightarrow IM=AI.\sin 60^0=\frac{3a}{4}$.

Tam giác SAB vuông tại B, BM là đường cao. Ta có: $AB^2=AM.SA\Rightarrow SA=\frac{AB^2}{AM}=\frac{4a}{\sqrt{3}}$.

Xét ΔSAI có: $SH.AI=IM.SA\Rightarrow SH=\frac{IM.SA}{AI}=2a$.

Vậy: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 47. Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC).

ΔBAC cân tại B và $ABC = 120^{\circ} \Rightarrow ACB = BAC = 30^{\circ}$

Theo bài $HC \parallel AB \Rightarrow HCA = CAB = 30^{\circ} \Rightarrow BCH = 60^{\circ} = AHC \Rightarrow$ $ABCH$ là hình thang cân.

Do đó $AH = BC = a$. Trong mp $(ABCH)$ dựng $HK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SHK)$.

Trong mp(SHK) kẻ $HP \perp SK \Rightarrow AB \perp HP \Rightarrow HP \perp (SAB)$ (1).

Trong mp(SHB) kẻ $HQ \perp SB$. Dễ dàng chứng minh được

$BC \perp HB \Rightarrow BC \perp (SHB) \Rightarrow BC \perp HQ$. Vì $\begin{cases} HQ \perp SB \\ BC \perp HQ \end{cases} \Rightarrow HQ \perp (SBC)$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $\left((SAB),(SBC)\right) = \left(HP, HQ\right) = PHQ$. Đặt $SH = x$

Xét ΔAHK vuông tại K: $HK = AH.\sin HAK = AH.\sin AHC = a.\sin 60^{\circ} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔAHK vuông tại K: $\dfrac{1}{HP^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2} \Rightarrow HP = \dfrac{a\sqrt{3}.x}{\sqrt{3a^2 + 4x^2}}$.

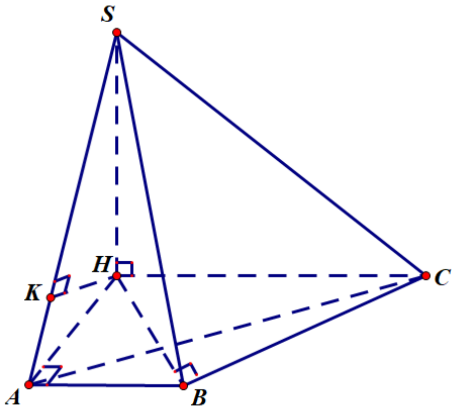
$HB = BC.\tan BCH = a.\tan 60^{\circ} = \sqrt{3}a$.

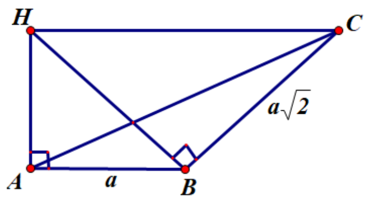
Xét ΔSHB vuông tại H: $\dfrac{1}{HQ^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HB^2} \Rightarrow HQ = \dfrac{a\sqrt{3}.x}{\sqrt{3a^2 + x^2}}$.

ΔHPQ vuông tại P nên: $\cos PHQ = \dfrac{\sqrt{10}}{5} = \dfrac{HP}{HQ} \Rightarrow x = \sqrt{3}a \Rightarrow SH = \sqrt{3}a.$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}SH.\dfrac{1}{2}BA.BC.\sin ABC = \dfrac{a^3}{4}$.

Câu 48. Chọn A.





Ta có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2.AB.BC.\cos 135^0}=\sqrt{5}.a$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC), $\Rightarrow SH\perp AB,\ SH\perp BC$

Do $SAB=SBC=90^0$ nên $AB\perp(SHA),\ BC\perp(SHB)\Rightarrow AB\perp AH, BC\perp BH$.

Do $ABC=135^0 \Rightarrow ABH=45^0$ nên ΔABH vuông cân tại A. Từ đó $HB=a\sqrt{2}$ suy ra ΔHBC vuông cân tại B. Suy ra $BHC=45^0\Rightarrow HC\,//\,AB$.

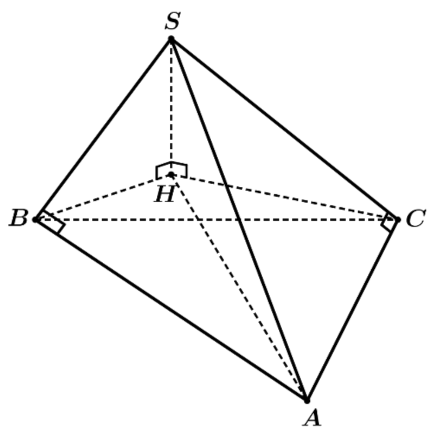
Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên SA, khi đó $HK\perp(SAB)$ nên $KH=d\left(H,(SAB)\right)=d\left(C,(SAB)\right)$.

Ta có $\sin\alpha=\dfrac{d\left(C,(SAB)\right)}{AC}=\dfrac{HK}{AC}=\dfrac{1}{5}\Rightarrow KH=\dfrac{\sqrt{5}}{5}a$.

Tam giác SAH vuông tại A có đường cao HK. Ta có $\dfrac{1}{HS^2}=\dfrac{1}{HK^2}-\dfrac{1}{HA^2}=\dfrac{5}{a^2}-\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{4}{a^2}\Rightarrow HS=\dfrac{a}{2}$.

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.SH.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{1}{2}a.a\sqrt{2}.\sin 135^o=\dfrac{a^3}{12}$.

Câu 49. Chọn C



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABC)\Rightarrow SH\perp(ABC)$.

Ta có $\begin{cases} AB\perp SB \\ AB\perp SH \end{cases}\Rightarrow AB\perp(SBH)\Rightarrow AB\perp BH$.

Ta có $\begin{cases}(SAB)\cap(ABC)=AB\\ SB\subset(SAB), SB\perp AB\\ BH\subset(ABC), BH\perp AB\end{cases} \Rightarrow \big((SAB),(ABC)\big)=(SB,BH)=SBH=60^\circ$.

Theo giả thiết, ΔABC cân tại A nên

$$AB=AC\Rightarrow \Delta SAB=\Delta SAC\Rightarrow SB=SC\Rightarrow \Delta SHB=\Delta SHC\Rightarrow HB=HC.$$

Suy ra HA là đường trung trực của BC, suy ra HA là đường phân giác góc BAC,

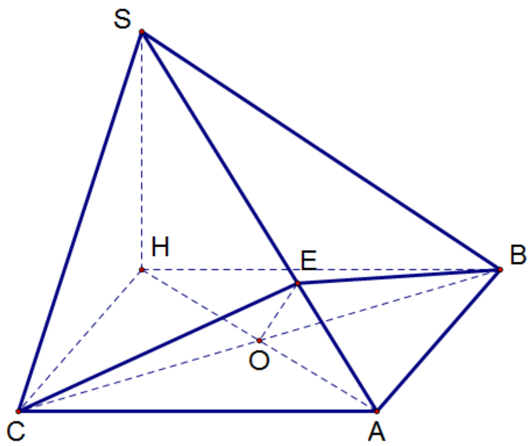
suy ra $HAB=60^\circ$.

Xét ΔHAB vuông tại B suy ra $\tan HAB=\dfrac{BH}{BA}\Rightarrow BH=BA.\tan HAB=a.\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$.

Xét ΔSHB vuông tại H suy ra $\tan SBH=\dfrac{SH}{BH}\Rightarrow SH=BH.\tan SBH=a\sqrt{3}.\tan 60^\circ=3a$.

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.3a.\dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin BAC=\dfrac{a}{2}.a.a.\sin 120^\circ=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 50. Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC).

Theo bài ra, ta có $\begin{cases}AC\perp SC\\ AC\perp SH\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SHC)\Rightarrow AC\perp HC\ (1)$.

Tương tự $\begin{cases}AB\perp SB\\ AB\perp SH\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SHB)\Rightarrow AB\perp HB\ (2)$.

Mặt khác $BAC=90^\circ$; $AB=AC=a\ (3)$.

Từ $(1),(2),(3)\Rightarrow ABHC$ là hình vuông cạnh a.

Gọi $O=HA\cap BC$, E là hình chiếu vuông góc của O lên $SA\Rightarrow OE\perp SA\ (4)$.

Ta có $\begin{cases}BC\perp AH\\ BC\perp SH\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAH)\Rightarrow BC\perp SA\ (5)$.

Từ $(4),(5)\Rightarrow SA\perp(BEC)\Rightarrow\begin{cases}SA\perp EB\\ SA\perp EC\end{cases}$.

Từ đó, ta được: góc giữa (SAC) và (SAB) là góc giữa EB và EC.

Xét hai tam giác ΔBEC, ΔBAC ta có: $BE=CE<BA=AC$

$\Rightarrow BEC > BAC$ .Vì $CAB = 90^0$ nên $BEC > 90° \Rightarrow BEC = 120°$.

Ta dễ dàng chỉ ra được $OEB = OEC = 60°$.

Đặt $SH = x \Rightarrow SA = \sqrt{x^2 + 8a^2} \Rightarrow OE = \dfrac{AO.SH}{SA} = \dfrac{a\sqrt{2}.x}{\sqrt{x^2 + 8a^2}}$.

Xét tam giác vuông ΔOCE ta có: $\tan 60° = \dfrac{OC}{OE} \Rightarrow a\sqrt{2} : \dfrac{a\sqrt{2}.x}{\sqrt{x^2 + 8a^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{2}V_{S.HBAC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.2a.4a^2 = \dfrac{4a^3}{3}$.

DẠNG 10 Cực trị khối đa diện

Câu 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = x$, $AD = 1$. Biết rằng góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng $30°$. Tìm giá trị lớn nhất V_{max} của thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $V_{max} = \frac{1}{2}$. **C.** $V_{max} = \frac{3}{2}$. **D.** $V_{max} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ đều, có cạnh bên bằng 1. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{4}{27}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{4\sqrt{3}}{27}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$, các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng 2. Giá trị của x để thể tích khối chóp đó lớn nhất là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{6}$.

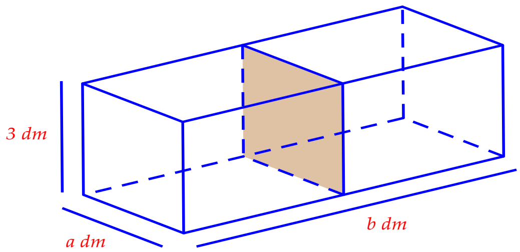
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $SA = x$ với $\left(0 < x < 2\sqrt{3}\right)$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 2. Tìm x để thể tích của khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất?

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Câu 5: Cho hình trụ có hai đường tròn đáy là $(O;R)$ và $(O';R)$, chiều cao của hình trụ là $R\sqrt{3}$. Giả sử AB là một đường kính cố định trên đường tròn (O) và M là điểm di động trên đường tròn (O'). Hỏi diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $2R^2$. **B.** $4R^2$. **C.** $R^2\sqrt{3}$. **D.** $2R^2\sqrt{2}$.

Câu 6: Người ta muốn thiết kế một bể cá bằng kính không có nắp với thể tích $72\,\text{dm}^3$, chiều cao là $3\,\text{dm}$. Một vách ngăn ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a,b như hình vẽ. Tính a,b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất, coi bề dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.



A. $a = \sqrt{24}\,\text{dm}$; $b = \sqrt{24}\,\text{dm}$. **B.** $a = 6\,\text{dm}$; $b = 4\,\text{dm}$.

C. $a = 3\sqrt{2}\,\text{dm}$; $b = 4\sqrt{2}\,\text{dm}$. **D.** $a = 4\,\text{dm}$; $b = 6\,\text{dm}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Một mặt phẳng không qua S và cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q thỏa mãn $\overrightarrow{SA}=2\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{SC}=3\overrightarrow{SP}$. Tính tỉ số $\frac{SB}{SN}$ khi biểu thức $T=\left(\frac{SB}{SN}\right)^2+4\left(\frac{SD}{SQ}\right)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{SB}{SN}=\frac{11}{2}$. **B.** $\frac{SB}{SN}=5$. **C.** $\frac{SB}{SN}=4$. **D.** $\frac{SB}{SN}=\frac{9}{2}$.

Câu 8: Một kim tự tháp Ai Cập có hình dạng là một khối chóp tứ giác đều có độ dài cạnh bên là một số thực dương không đổi. Gọi α là góc giữa cạnh bên của kim tự tháp và mặt đáy. Khi thể tích của kim tự tháp lớn nhất, tính $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC=a$ và $BC=2x$. Tính thể tích lớn nhất V_{max} của hình chóp $S.ABC$

A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Câu 10: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc 60^o, gọi M là điểm đối xứng với C qua D; N là trung điểm của SC, mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Gọi (H_1) là phần đa diện chứa điểm S có thể tích V_1; (H_2) là phần đa diện còn lại có thể tích V_2. Tính tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{31}{5}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{7}{5}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 11: Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích $V=\frac{1}{6}$, góc $ACB=45°$ và $AD+BC+\frac{AC}{\sqrt{2}}=3$. Hỏi độ dài cạnh CD?

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$ cắt các tia $Ox,\ Oy,Oz$ tại A,B,C (A,B,C không trùng với gốc tọa độ). Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{81}{2}$ **B.** $\frac{243}{2}$ **C.** $\frac{81}{6}$ **D.** 243

Câu 13: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm M sao cho $AM=x$. Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên AB,MB. Đường thẳng qua E,F cắt d tại N. Xác định x để thể tích khối tứ diện $BCMN$ nhỏ nhất.

A. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=\sqrt{2}$.

Câu 14: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Tam giác ABC' có diện tích bằng $3\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng tạo với đáy một góc bằng $\alpha, \alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Tìm α để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $\tan\alpha = \sqrt{6}$. **C.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **D.** $\tan\alpha = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$, trong đó $SA \perp (ABC)$, $SC = a$ và đáy ABC là tam giác vuông cân tại đỉnh C. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Khi thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất thì $\sin 2\alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x$, các cạnh còn lại của hình chóp đều bằng a. Để thể tích khối chóp lớn nhất thì giá trị x bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Tính tổng $T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $T = \frac{13}{9}$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = \frac{5}{4}$. **D.** $T = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, $CD = y$, tất cả các cạnh còn lại bằng 2. Khi thể tích tứ diện $ABCD$ là lớn nhất tính xy.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD $(AN < AM)$ sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của $\frac{1}{AN^2} + \frac{16}{AM^2}$ bằng

A. $\frac{17}{4}$. **B.** 5. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** 2.

Câu 20: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M,N là hai điểm nằm trên hai cạnh SC,SD sao cho $\frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$ và $\frac{SN}{ND} = 2$, biết G là trọng tâm của tam giác SAB. Tỉ số thể tích $\frac{V_{GMND}}{V_{S.ABCD}} = \frac{m}{n}$ (m, n là các số nguyên dương và $(m,n) = 1$). Giá trị của $m+n$ bằng

A. 17. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 7.

Câu 21: Cho tứ diện $ABCD$ có $DAB = CBD = 90^o$, $AB = a$, $AC = a\sqrt{5}$ và $ABC = 135^o$; Góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD) bằng 30^o. Thể tích của tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Câu 22: Cho một cái hộp hình chữ nhật có kích thước ba cạnh lần lượt là $4cm$, $6cm$, $9cm$ như hình vẽ. Một con kiến ở vị trí A muốn đi đến vị trí B. Biết rằng con kiến chỉ có thể bò trên cạnh hay trên bề mặt của hình hộp đã cho. Gọi $x cm$ là quãng đường ngắn nhất con kiến đi từ A đến B. Khẳng định nào sau đây đúng?

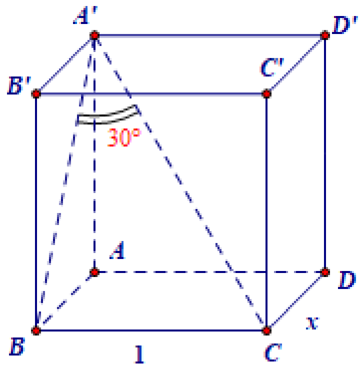
A. $x \in (15;16)$. **B.** $x \in (13;14)$. **C.** $x \in (12;13)$. **D.** $x \in (14;15)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	**2.C**	**3.C**	**4.D**	**5.A**	**6.D**	**7.C**	**8.B**	**9.A**	**10.C**
11.B	**12.D**	**13.DC**	**14.**	**15.D**	**16.A**	**17.C**	**18.C**	**19.B**	**20.B**
21.D	**22.B**								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn C**



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $BC \perp (ABB'A')$.

Suy ra: $\left(A'C;(ABB'A')\right) = \left(A'C;A'B\right) = BA'C = 30°$

$\Delta A'BC$ vuông tại B nên $A'B = \dfrac{BC}{\tan 30°} = \sqrt{3}$.

$\Delta A'AB$ vuông tại A nên $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{3 - x^2}$.

Thể tích khối hộp: $V(x) = AB.BC.A'A = x\sqrt{3 - x^2}$ với $x \in \left(0;\sqrt{3}\right)$.

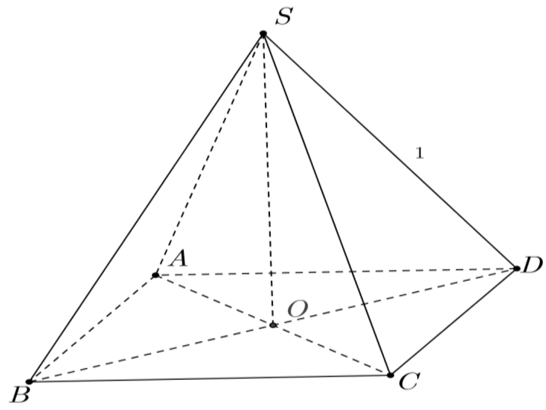
Có: $V'(x) = \sqrt{3 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{3 - x^2}} = \dfrac{3 - 2x^2}{\sqrt{3 - x^2}}$. Cho $V'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}, (x > 0)$.

Có bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		$\sqrt{3}$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	0

Vậy $V_{max} = \dfrac{3}{2}$ khi $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 2: **Chọn C**

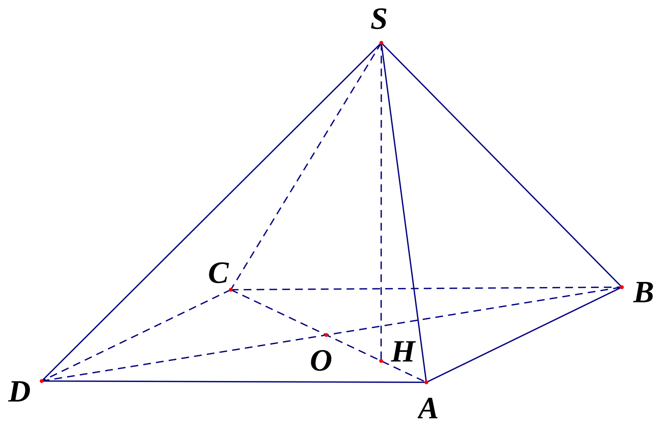


Gọi O là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow SO \perp \left(ABCD\right) \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD}$.

Đặt $AB = x$ $\left(x > 0\right) \Rightarrow BD = x\sqrt{2} \Rightarrow OD = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SOD vuông tại $O \Rightarrow SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{2}} = \dfrac{\sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x \in \left(0;\sqrt{2}\right)$

Câu 3: **Chọn D**



Vì $SB = SC = SD = 2$ nên hình chiếu H của S lên $ABCD$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Mà tứ giác $ABCD$ có các cạnh bằng nhau nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi, do đó $H \in AC$; ΔSBD; ΔCBD; ΔABD có các cạnh tương ứng bằng nhau nên $SO = AO = CO \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại $S \Rightarrow AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = \sqrt{x^2 + 4}$.

ΔSAC vuông tại S, có đường cao SH nên $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SC^2} \Rightarrow SH = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

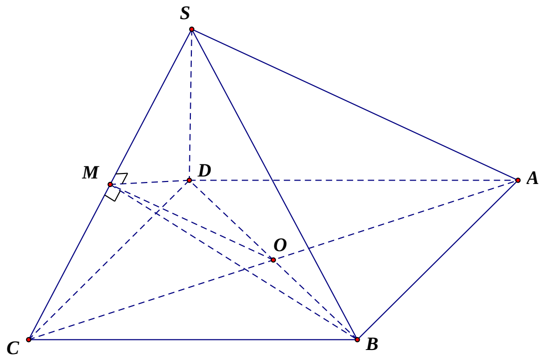
Lại có $OB^2 + OC^2 = BC^2 \Rightarrow OB^2 = BC^2 - \dfrac{AC^2}{4} = 4 - \dfrac{4 + x^2}{4} = \dfrac{12 - x^2}{4} \Rightarrow OB = \dfrac{\sqrt{12 - x^2}}{2}$.

$S_{ABCD} = AC.OB = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(x^2 + 4\right)\left(12 - x^2\right)}$.

Ta có $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.x.\sqrt{12 - x^2} \le \dfrac{1}{3}.\dfrac{x^2 + 12 - x^2}{2} = 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 12 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt{6}$.

Cách 2.



Theo giả thiết ta có hai tam giác SBC, SCD là hai tam giác đều bằng nhau.

Gọi M là trung điểm của SC suy ra $\begin{cases} BM \perp MC \\ DM \perp MC \end{cases} \Rightarrow MC \perp \left(MBD\right)$.

Ta có $V_{S.ABCD} = 2.V_{S.BCD} = 4.V_{C.MBD}$.

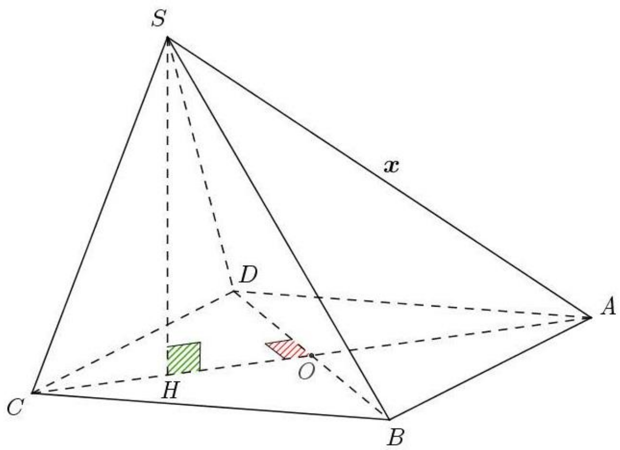
Ta lại có $V_{C.MBD} = \frac{1}{3}.MC.S_{\Delta MBD} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}MB.MD.\sin BMD = \frac{1}{2}\sin BMD$,

$\left(MC = 1, MB = MD = \sqrt{3}\right)$.

Do đó để $V_{S.ABCD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow V_{C.MBD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin BMD = 1 \Leftrightarrow BMD = 90°$.

Xét ΔMBD vuông tại M, khi đó $x = SA = 2.MO = BD = \sqrt{MD^2 + MB^2} = \sqrt{6}$.

Câu 4: Chọn D



Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên AC

Ta có $\Delta ABD = \Delta CBD = \Delta SBD\ (c-c-c) \Rightarrow \mathrm{SO} = \mathrm{OA} = \mathrm{OC} = \frac{1}{2}AC$

Mà SO là trung tuyến của ΔSAC nên ΔSAC vuông tại S.

Lại có $\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (ABCD) \perp (SAC), (1)$

Và $(SAC) \cap (ABCD) = AC$; $SH \perp AC, (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $SH \perp (ABCD)$.

Trong ΔSAC vuông tại S có $AC = \sqrt{x^2 + 4}; \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{4} \Rightarrow SH = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

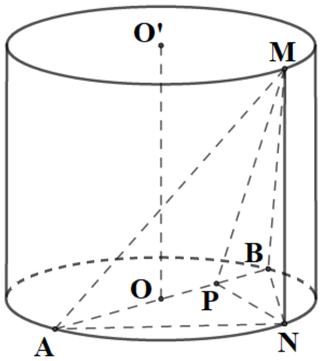
Trong ΔOAB vuông tại O có $OB = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{3 - \frac{x^2}{4}}$.

Thể tích hình chóp là $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.SH.2.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.SH.AC.OB$

$=\frac{1}{3}.\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}.\sqrt{x^2+4}.\sqrt{3-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{3}\sqrt{x^2(12-x^2)}\le\frac{1}{3}.\frac{x^2+12-x^2}{2}=2$.

$V_{S.ABCD}$ lớn nhất bằng 2 khi và chỉ khi $x^2=12-x^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{6}$.

Câu 5: Chọn A



Gọi N là hình chiếu của M trên $(O) \Rightarrow MN=R\sqrt{3}$.

Gọi P là hình chiếu của N trên AB, khi M di chuyển trên (O) thì $0\le NP\le R$.

Ta có: $\begin{cases} MN\perp(ABN) \\ NP\perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN\perp AB \\ NP\perp AB \end{cases} \Rightarrow AB\perp(MNP)\Rightarrow AB\perp MP$.

$\Rightarrow S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}AB.MP=\frac{1}{2}.2R.MP=R.MP$.

Mặt khác, tam giác MNP vuông tại $N \Rightarrow MP=\sqrt{MN^2+NP^2}\le\sqrt{3R^2+R^2}=2R$.

$\Rightarrow S_{\Delta MAB}=R.MP\le R.2R=2R^2$. Dấu "=" xảy ra khi $NP=R$ hay khi $MO'\perp AB$.

Vậy diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất bằng $2R^2$.

Câu 6: Chọn D

Thể tích của bể cá: $V=3ab=72\,\text{dm}^3 \Leftrightarrow b=\frac{72}{3a}=\frac{24}{a}$, với $a,b>0$.

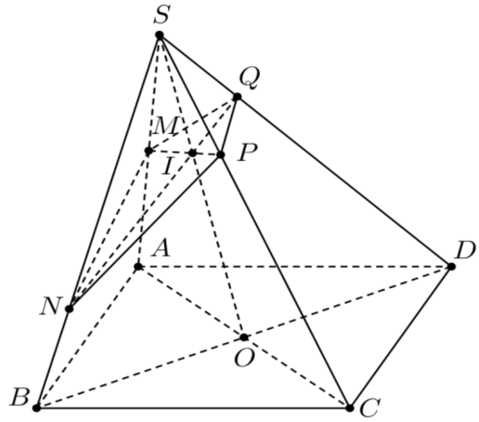
Diện tích kính để làm bể cá như hình vẽ:

$S=3.3a+2.3b+ab=9a+6.\frac{24}{a}+a.\frac{24}{a}=9a+\frac{144}{a}+24\ge 2\sqrt{9a.\frac{144}{a}}+24 \Leftrightarrow S\ge 96$.

$S=96 \Leftrightarrow 9a=\frac{144}{a} \Leftrightarrow a=4 \Rightarrow b=6$.

Vậy để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất thì $a=4\,\text{dm}$; $b=6\,\text{dm}$.

Câu 7: Chọn C



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$, gọi $I = MP \cap AC$. Lấy điểm $N \in SB$, $NI \cap SD = Q$.

Do đáy $ABCD$ là hình bình hành nên ta chứng minh được hệ thức sau:

$\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = \frac{SB}{SQ} + \frac{SD}{SN}$.

Đặt $x = \frac{SB}{SQ}$, $y = \frac{SD}{SN}$ với $x > 0; y > 0$. Theo bài ta được $x + y = 2 + 3 = 5$.

Theo bài, ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^2 + 4y^2$ với $x > 0, y > 0$ và $x + y = 5$.

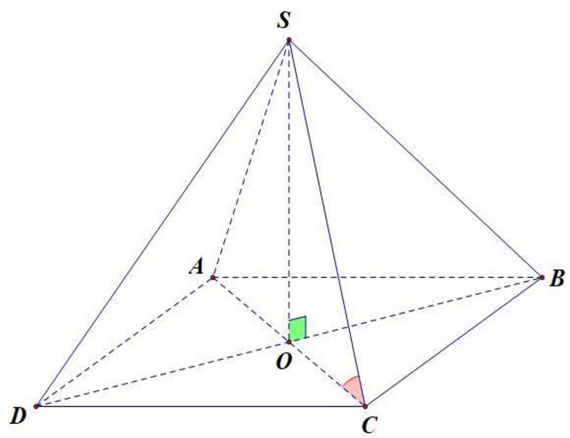
Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được:

$5^2 = \left(1.x + \frac{1}{2}.2y\right)^2 \le \left(1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(x^2 + 4y^2\right)$ suy ra $x^2 + 4y^2 \ge 20$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{2y}{\frac{1}{2}} \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 20 đạt được khi $x = 4$, $y = 1$ hay $\frac{SB}{SN} = 4$.

Câu 8: Chọn B



Đặt $SC = a$ với $a > 0$. Ta có: $\begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ SC \cap (ABCD) = C \end{cases}$ suy ra $SCO = \alpha$.

Mặt khác: $OC = a.\cos\alpha$; $SO = a.\sin\alpha$.

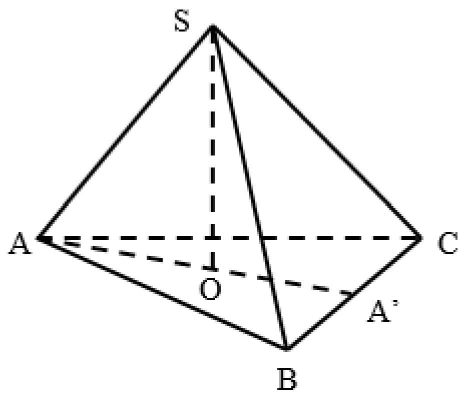
$AC = 2OC = 2a.\cos\alpha$; $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}.\cos\alpha$; $S_{ABCD} = AB^2 = 2a^2.\cos^2\alpha$.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \dfrac{2}{3}a^3.\sin\alpha.\cos^2\alpha = \dfrac{2}{3}a^3.\sin\alpha.(1-\sin^2\alpha)$

Xét hàm $y = t(1-t^2)$ với $\begin{cases} t = \sin\alpha \\ 0 < t < 1 \end{cases}$

Lập bảng biến thiên ta tìm được $t = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ thì hàm số y đạt giá trị lớn nhất.

Câu 9: Chọn A



Gọi O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC).

Vì $SA = SB = SC$ nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Tam giác ABC cân tại A. Gọi A' là trung điểm của BC. Khi đó AA' là đường trung trực của tam giác ABC nên điểm O nằm trên đường thẳng AA'.

Ta có: $AA' = \sqrt{AB^2 - BA'^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$ nên $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AA' = \dfrac{1}{2}2x\sqrt{a^2-x^2} = x\sqrt{a^2-x^2}$.

Lại có: $S_{ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4R} \Rightarrow OA = R = \dfrac{AB.AC.BC}{4S_{ABC}} = \dfrac{a^2.2x}{4x.\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$.

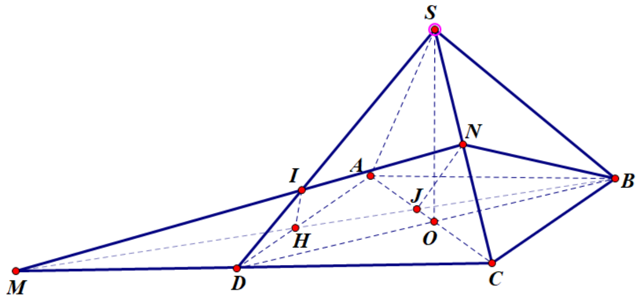
Trong tam giác vuông SAO, ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^4}{4(a^2-x^2)}} = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{3a^2-4x^2}{(a^2-x^2)}}$.

Thể tích $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{3a^2-4x^2}{a^2-x^2}}.x\sqrt{a^2-x^2} = \dfrac{a}{12}.2x\sqrt{3a^2-4x^2}$.

Mặt khác: $2x\sqrt{3a^2-4x^2} \le \dfrac{4x^2+3a^2-4x^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$.

Do đó: $V_{S.ABC} \le \frac{a}{12}.\frac{3}{2}a^2 = \frac{a^3}{8}$. Vậy $V_{max} = \frac{a^3}{8}$ khi $2x = \sqrt{3a^2 - 4x^2} \Leftrightarrow x = a\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Câu 10: Chọn C



Áp dụng tỉ số thể tích cho khối chóp $M.CNB$ ta có

$$\frac{V_{MDIH}}{V_{MCNB}} = \frac{MD}{MC}.\frac{MI}{MN}.\frac{MH}{MB} = \frac{1}{4}.\frac{MI}{MN}$$

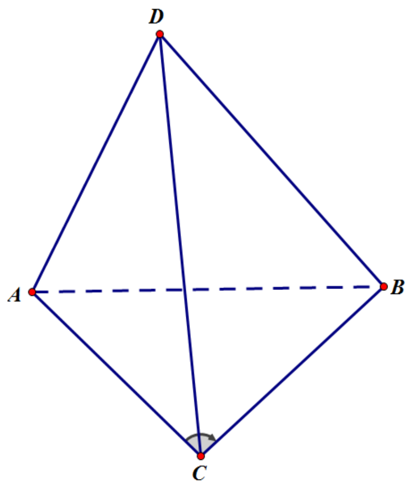
Định lý menelaus cho tam giác MNC với cát tuyến DIS ta có:

$\frac{SN}{SC}.\frac{CD}{DM}.\frac{MI}{IN} = 1 \Leftrightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MI}{MN} = \frac{2}{3}$. Vậy $\frac{V_{MDIH}}{V_{MCNB}} = \frac{1}{4}.\frac{2}{3} \Rightarrow V_2 = \frac{5}{6}V_{MCNB}$

Mà $V_{MCNB} = \frac{1}{3}d_{(N;(MBC))}.S_{\Delta MBC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.SO.DC.BC = \frac{1}{2}V_{SABCD}$

$V_2 = \frac{5}{6}.\frac{1}{2}V_{SABCD} = \frac{5}{12}V_{SABCD} \Rightarrow V_1 = \frac{7}{12}V_{SABCD}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

Câu 11: Chọn B



$$V = \frac{1}{3}.S_{ABC}.d\left(D,\left(ABC\right)\right) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.CA.CB.\sin 45°.d\left(D,\left(ABC\right)\right)$$

$$= \frac{1}{6}.\frac{1}{\sqrt{2}}CA.CB.d\left(D,\left(ABC\right)\right) \le \frac{1}{6}.\frac{CA.CB.AD}{\sqrt{2}} \quad (1).$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương AD, BC, $\frac{AC}{\sqrt{2}}$, ta có $\frac{AC}{\sqrt{2}}.BC.AD \le \left(\frac{\frac{AC}{\sqrt{2}} + BC + AD}{3}\right)^3$.

Do đó, $V \le \dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{\dfrac{AC}{\sqrt{2}}+BC+AD}{3}\right)^3=\dfrac{1}{6}$ (2).

Mặt khác ta có V = $\dfrac{1}{6}$, do đó để thõa mãn yêu cầu bài toán thì từ và, đẳng thức phải xảy ra, tức là $\begin{cases} DA\perp(ABC) \\ \dfrac{AC}{\sqrt{2}}=BC=AD=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CD=\sqrt{AC^2+DA^2} \\ BC=1, AD=1, AC=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow CD=\sqrt{3}$.

Câu 12: Chọn D

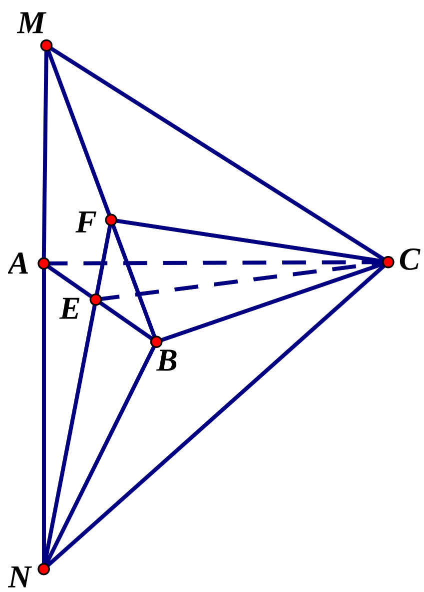
Ta có: $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ $(a,b,c>0)$

$(P): \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$; $M(9;1;1)\in(P) \Rightarrow \dfrac{9}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$

$1=\dfrac{9}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{9}{a}.\dfrac{1}{b}.\dfrac{1}{c}} \Rightarrow V_{OABC}=abc\ge 243.$

Đẳng thức xảy ra khi $a=27, b=c=3.$

Câu 13: Chọn D



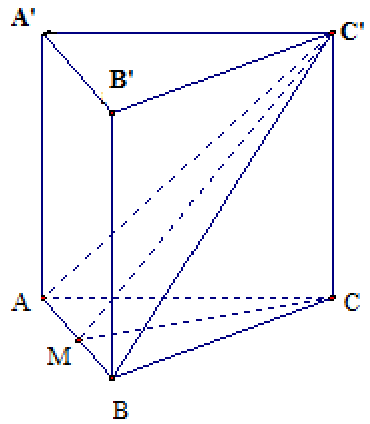
Do $\left.\begin{matrix} MB\perp FC \\ MB\perp EC \end{matrix}\right\} \Rightarrow MB\perp(EFC) \Rightarrow FB\perp EF$. Xét các tam giác vuông: $\Delta NAE, \Delta BFE, \Delta BAM.$

Ta có $\Delta NAE \sim \Delta BFE \sim \Delta BAM \Rightarrow \dfrac{NA}{BA}=\dfrac{AE}{AM} \Rightarrow AM.AN=AE.BA=2$.

$V_{BCMN}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.(AM+AN)=\dfrac{1}{3}.\dfrac{2^2\sqrt{3}}{4}.(AM+AN)\ge\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{AM.AN}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}.$

Vậy $\min V_{BCMN}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ khi $AM=AN=\sqrt{2}$ hay $x=\sqrt{2}.$

Câu 14: Chọn C



Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó $AB \perp (MCC')$

$\Rightarrow$ Góc giữa (ABC') và (ABC) là $CMC' = \alpha$. Đặt $AB = x,\ x > 0$

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$, $CC' = CM.\tan\alpha = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}\tan\alpha \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\tan\alpha = \dfrac{3x^3}{8}\tan\alpha$

Ta lại có $S_{ABC} = S_{ABC'}\cos\alpha = 3\sqrt{3}\cos\alpha \Rightarrow \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}.\cos\alpha \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3\cos\alpha}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{3}{8}.24\cos\alpha\sqrt{3\cos\alpha}.\tan\alpha = 9\sqrt{3}.\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}$

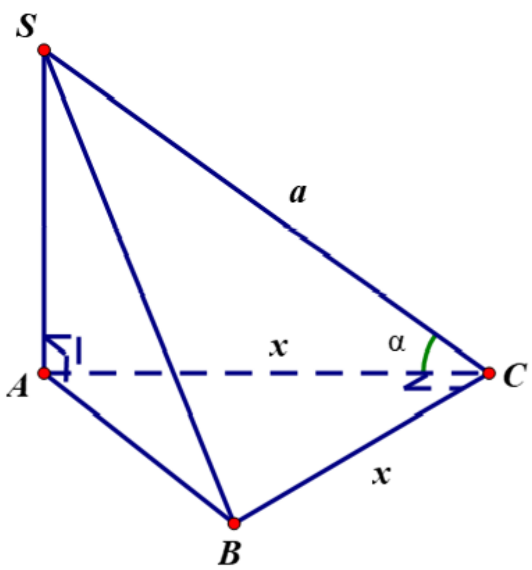
$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 9\sqrt{3}.\sqrt{\cos\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}$

Xét hàm số $f(t) = t(1-t^2) = t - t^3,\ t \in (0;1)$. Ta có $f'(t) = 1 - 3t^2$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $\max f(t) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

Khi đó $\max V_{ABC.A'B'C'} = 6 \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{2}$.

Câu 15: Chọn D



Đặt $AC = BC = x$, $SA = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\sqrt{a^2 - x^2}.\frac{1}{2}.x^2 = \frac{1}{6}\sqrt{a^2x^4 - x^6}$.

Xét hàm số $f(x) = a^2x^4 - x^6$ với $0 < x < a$. $f'(x) = 4a^2x^3 - 6x^5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{a\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$.

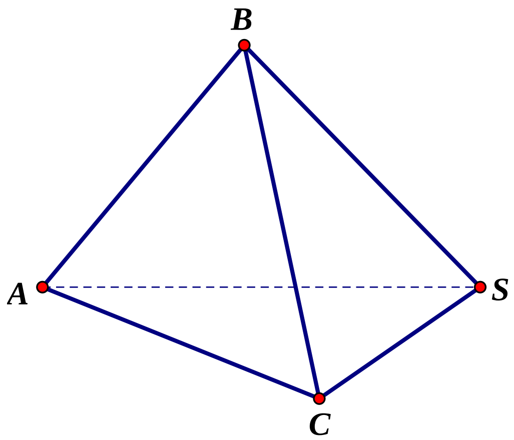
x	0		$\frac{a\sqrt{6}}{3}$		a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Khi đó $\sin\alpha = \frac{SA}{SC} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{AC}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha = 2.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 16: Chọn A

Cách 1:



Đặt $\alpha = ABS; \beta = ABC = 60^0; \gamma = CBS = 60^0$.

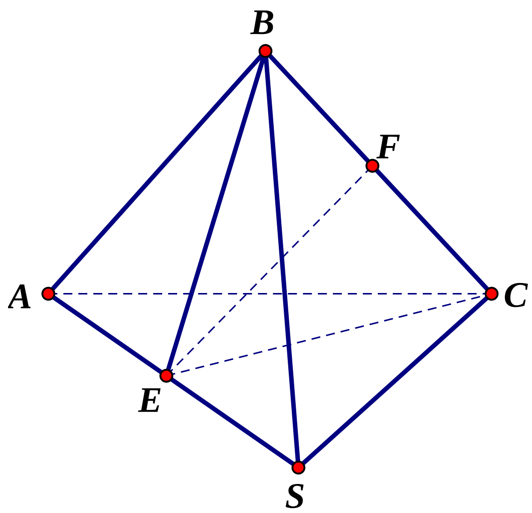
Ta có

$$V_{B.SAC} = \frac{BA.BC.BS}{6}\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \frac{a^3}{6}\sqrt{\frac{1}{2} - \cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha}$$

$V_{B.SAC}$ đạt GTLN khi $\frac{1}{2} - \cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha$ đạt GTLN $\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{4}$.

Với $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ ta được $x = \sqrt{BA^2 + BS^2 - 2BA.BS.\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Cách 2:



Gọi E,F lần lượt là trung điểm SA và BC.

Vì ΔBAS và ΔCAS lần lượt cân tại B và C nên $\begin{cases} BE \perp SA \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BEC)$

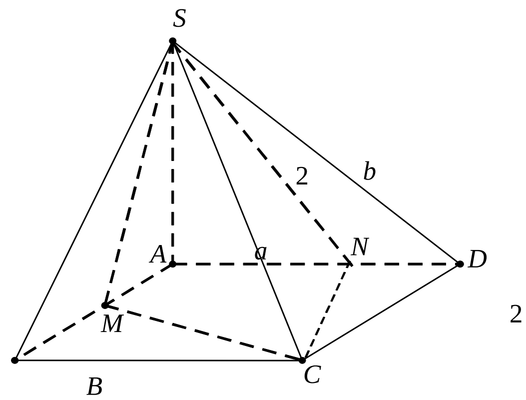
Ta có: $BE = CE = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}; EF = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}$

Suy ra $S_{\Delta BEC} = \frac{1}{2} BC.EF = \frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{4}$.

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3} SA.S_{\Delta BEC} = \frac{1}{3} x \frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{4} \le \frac{a}{12} \frac{x^2 + (3a^2 - x^2)}{2} = \frac{a^3}{8}$.

Dấu " = " xảy ra khi $x = \sqrt{3a^2 - x^2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 17: Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ với:

$A(0;0;0)$, $S(0;0;2)$, $B(2;0;0)$, $C(2;2;0)$, $D(0;2;0)$, $M(a;0;0)$, $N(0;b;0)$ $(a,b \in [0;2])$

$\overrightarrow{AC} = (2;2;0)$, $\overrightarrow{AM} = (a;0;0)$, $\overrightarrow{AN} = (0;b;0)$

$\overrightarrow{SC} = (2;2;-2)$, $\overrightarrow{SM} = (a;0;-2)$, $\overrightarrow{SN} = (0;b;-2)$

$\left[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC}\right] = (4;2a-4;2a) \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (2;a-2;a)$ là VTPT của mp (SCM)

$\left[\overrightarrow{SN},\overrightarrow{SC}\right]=\left(4-2b;-4;-2b\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=\left(2-b;-2;-b\right)$ là VTPT của mp$\left(SCN\right)$

$\left(SCM\right)\perp\left(SCN\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow 2\left(2-b\right)-2\left(a-2\right)-ab=0\Leftrightarrow 8-2b-2a-ab=0$

$\Leftrightarrow 8-2a-b\left(2+a\right)=0\Leftrightarrow b=\dfrac{8-2a}{a+2}$

Mà: $0\le b=\dfrac{8-2a}{a+2}\le 2\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{8-2a}{a+2}\ge 0\\ \dfrac{8-2a}{a+2}\le 2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a\in(-2;4]\\ \dfrac{4-4a}{a+2}\le 0\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left[1;+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow a\in\left[1;4\right]$

Do đó: $a\in\left[1;2\right]$

$S_{AMCN}=S_{\Delta AMC}+S_{\Delta ACN}=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right]\right\|+\dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AC}\right]\right\|$

$=\dfrac{1}{2}.2a+\dfrac{1}{2}.2b=a+b=a+\dfrac{8-2a}{a+2}=\dfrac{a^2+8}{a+2}$

Xét hàm số $f\left(a\right)=\dfrac{a^2+8}{a+2}$ trên $\left[1;2\right]$

$f'\left(a\right)=\dfrac{a^2+4a-8}{\left(a+2\right)^2}$; $f'\left(a\right)=0\Leftrightarrow a^2+4a-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-2-2\sqrt{3}\notin\left[1;2\right]\\ a=-2+2\sqrt{3}\end{array}\right.$

Ta có: $f\left(1\right)=3$ khi $a=1,b=2$; $f\left(2\right)=3$ khi $a=2,b=1$

$f\left(-2+\sqrt{3}\right)=-4+4\sqrt{3}$ khi $a=-2+2\sqrt{3},b=-2+2\sqrt{3}$

Khi đó: $\underset{a\in\left[0;2\right]}{Max}f\left(a\right)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2,b=1\\ a=1,b=2\end{array}\right.$.

$V_{S.AMCN}=\dfrac{1}{3}.SA.S_{AMCN}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow$ S_{AMCN} đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2,b=1\\ a=1,b=2\end{array}\right.$

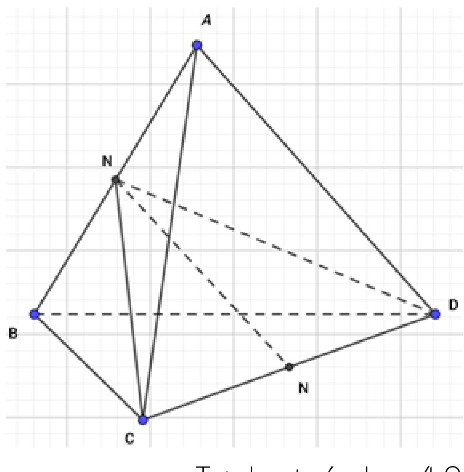
$a=2,b=1$. $\overrightarrow{AM}=\left(2;0;0\right)\Rightarrow AM=2$, $\overrightarrow{AN}=\left(0;1;0\right)\Rightarrow AN=1$

Vậy: $T=\dfrac{1}{AN^2}+\dfrac{1}{AM^2}=\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{5}{4}$.

$a=1,b=2$. $\overrightarrow{AM}=\left(1;0;0\right)\Rightarrow AM=1$, $\overrightarrow{AN}=\left(0;2;0\right)\Rightarrow AN=2$

Vậy: $T=\dfrac{1}{AN^2}+\dfrac{1}{AM^2}=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$. Kết luận: $T=\dfrac{1}{AN^2}+\dfrac{1}{AM^2}=\dfrac{5}{4}$.

Câu 18: Chọn C



Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD.

Tam giác ADB,CAB là hai tam giác cân cạnh đáy AB nên $DM\perp AB$ và $CM\perp AB$. Suy ra $AB\perp(MCD)$.

$V_{ABCD}=V_{B.MCD}+V_{A.MCD}=\frac{1}{3}.BM.S_{MCD}+\frac{1}{3}.AM.S_{MCD}=\frac{x}{3}.S_{MCD}$.

Tam giác $\Delta ABC=\Delta ABD(c.c.c)$ nên $CM=DM \Rightarrow MN\perp CD$.

$S_{MCD}=\frac{1}{2}.CD.MN=\frac{1}{2}y.\sqrt{MC^2-CN^2}=\frac{1}{2}y.\sqrt{\left(BC^2-BM^2\right)-CN^2}=\frac{1}{2}y\sqrt{4-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}}$

$=\frac{1}{4}y\sqrt{16-\left(x^2+y^2\right)}$.

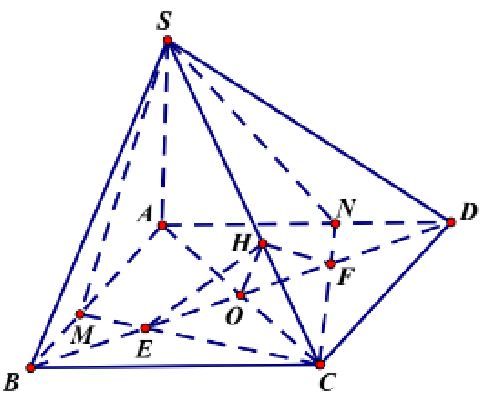
$V_{ABCD}=\frac{xy}{12}\sqrt{16-\left(x^2+y^2\right)}\le\frac{xy}{12}\sqrt{16-2xy}=\frac{1}{12}\sqrt{xy.xy.(16-2xy)}$

$\le\frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{xy+xy+(16-2xy)}{3}\right)^3}=\frac{1}{12}\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}x=y\\xy=16-2xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\xy=\frac{16}{3}\end{cases}$.

Vậy thể tích $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất khi $xy=\frac{16}{3}$.

Câu 19: Chọn B



Cách 1: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;2)$.

Suy ra $C(2;2;0)$. Đặt $AM=x$, $AN=y$, $x,y\in[0;2]$, $x>y$; suy ra $M(x;0;0)$, $N(0;y;0)$.

$\overrightarrow{SM}=(x;0;-2)$, $\overrightarrow{SC}=(2;2;-2)$, $\overrightarrow{SN}=(0;y;-2)$.

$\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SC}\right]=(4;2x-4;2x)$, $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{SN},\overrightarrow{SC}\right]=(4-2y;-4;-2y)$.

Do $(SMC)\perp(SNC)$ nên $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow 4(4-4y)-4(2x-4)-4xy=0\Leftrightarrow xy+2(x+y)=8$.

$\Leftrightarrow y=\frac{8-2x}{x+2}$, do $y\le 2$ nên $\frac{8-2x}{x+2}\le 2\Leftrightarrow x\ge 1$.

$S_{AMCN}=S_{ABCD}-S_{BMC}-S_{DNC}=4-(2-x)-(2-y)=x+y$.

Do đó $V_{S.AMCD}=\frac{1}{3}SA.S_{AMCN}=\frac{2}{3}(x+y)=\frac{2}{3}\left(x+\frac{8-2x}{x+2}\right)=\frac{2}{3}\frac{x^2+8}{x+2}$.

Xét $f(x)=\frac{2}{3}\frac{x^2+8}{x+2}$ với $x\in[1;2]$, $f'(x)=\frac{2}{3}\frac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+4x-8=0\Leftrightarrow x=-2+2\sqrt{3}$; $x=-2-2\sqrt{3}$.

Lập BBT ta suy ra $\max\limits_{[1;2]} f(x)=f(1)=f(2)=2$.

Vậy $\max V_{S.AMCN}=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\ (do\ x>y)\Rightarrow\frac{16}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{16}{x^2}+\frac{1}{y^2}=5$.

Cách 2: Đặt $AM=x$, $AN=y$ $x,y\in[0;2]$, $x>y$.

Gọi $O=AC\cap DB$; $E=BD\cap CM$; $F=BD\cap CN$.

H là hình chiếu vuông góc của O trên SC, khi đó: $HO=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ta có: $\begin{cases}SC\perp OH\\SC\perp BD\end{cases}\Rightarrow SC\perp(HBD)\Rightarrow\begin{cases}SC\perp HE\\SC\perp HF\end{cases}$.

Do đó góc giữa (SCM) và (SCN) bằng góc giữa HE và HF. Suy ra $HE\perp HF$.

Mặt khác $V_{S.AMCN}=\frac{1}{3}SA.S_{AMCN}=\frac{2}{3}(x+y)$.

Tính OE, OF:

Ta có: $x>0$, $y>0$ và nếu $x\neq 2$, $y\neq 2$ thì gọi K là trung điểm của AM, khi đó:

$\frac{OE}{EB}=\frac{KM}{MB}=\frac{x}{4-2x}\Rightarrow\frac{OE}{x}=\frac{EB}{4-2x}=\frac{OB}{4-x}\Rightarrow OE=\frac{x\sqrt{2}}{4-x}$.

Tương tự: $OF=\frac{y\sqrt{2}}{4-y}$. Mà $OE.OF=OH^2\Leftrightarrow(x+2)(y+2)=12$.

Nếu $x=2$ hoặc $y=2$ thì ta cũng có $OE.OF=OH^2\Leftrightarrow(x+2)(y+2)=12$.

Tóm lại: $(x+2)(y+2)=12$.

Suy ra: $V_{S.AMCN}=\frac{1}{3}SA.S_{AMCN}=\frac{2}{3}(x+y)=\frac{2}{3}\left[(x+2)+(y+2)-4\right]=\frac{2}{3}\left[(x+2)+\frac{12}{x+2}-4\right]$.

Khảo sát hàm số ta được: $\max V_{S.AMCN}=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\ (do\ x>y)$

$\Rightarrow\frac{16}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{16}{x^2}+\frac{1}{y^2}=5$.

Cách 3. Đặt $AM=m, AN=n$ $(0\le n<m\le 2)$

Dựng $AP\perp CM, AQ\perp CN (P\in CM, Q\in CN)$.

Ta có $\frac{AP}{BC}=\frac{AM}{CM}\Rightarrow AP=\frac{2m}{\sqrt{4+(2-m)^2}}$.

Tương tự $AQ=\frac{2n}{\sqrt{4+(2-n)^2}}$.

Trong mặt phẳng (SAP) dựng $AL\perp SP(L\in SP), AV\perp SQ(V\in SQ)$. Mặt phẳng (ALV) cắt SC tại H.

Dựa vào điều kiện bài toán dễ dàng chứng minh được tứ giác $ALHV$ là hình chữ nhật và $AH\perp SC$.

Ta có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{3}{8}\Rightarrow AH^2=\frac{8}{3}$.

$\frac{1}{AL^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SP^2}=\frac{m^2-2m+4}{2m^2}\Rightarrow AL^2=\frac{2m^2}{m^2-2m+4}$ và $AV^2=\frac{2n^2}{n^2-2n+4}$.

Do hình chữ nhật nên

$AV^2+AL^2=AH^2\Rightarrow\frac{2n^2}{n^2-2n+4}+\frac{2m^2}{m^2-2m+4}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow(mn-m-n+4)(mn+2(m+n)-8)=0$

Do $mn-m-n+4=mm+2-m+2-n>0$ nên $mn+2(m+n)=8$.

Do $0<n<m\le 2\Rightarrow(m-2)(n-2)\ge 0\Leftrightarrow mn-2(m+n)+4\ge 0\Rightarrow 12-4(m+n)\ge 0\Rightarrow m+n\le 3$.

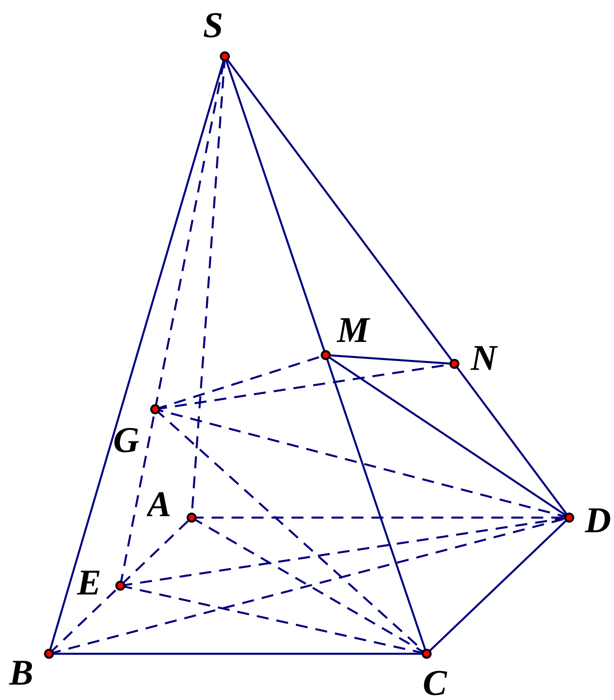
Ta có: $S_{ANCM}=S_{ABCD}-S_{BMC}-S_{DNC}=4-\frac{1}{2}.2.(2-m)-\frac{1}{2}.2.(2-n)=m+n$.

Suy ra $V_{SAMCN}=\frac{1}{3}SA.S_{AMCN}=\frac{2}{3}(m+n)\le 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m=2,n=1$.

Khi đó $\frac{1}{AN^2}+\frac{16}{AM^2}=5$.

Câu 20: Chọn B



$\dfrac{V_{S.GMN}}{V_{S.GMD}} = \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_{GMND} = \dfrac{1}{3}V_{S.GMD}$.

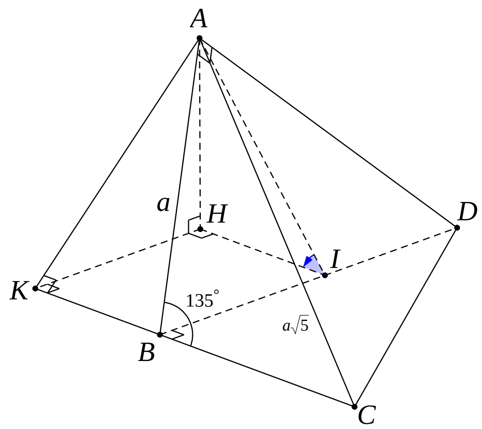
$\dfrac{V_{S.GMD}}{V_{S.GCD}} = \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{S.GMD} = \dfrac{1}{2}V_{S.GCD}$

$\dfrac{V_{S.GCD}}{V_{S.ECD}} = \dfrac{SG}{SE} = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra $V_{GMND} = \dfrac{1}{3}V_{S.GMD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}V_{S.ECD} = \dfrac{1}{9}.V_{S.ECD} = \dfrac{1}{9}.\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{18}V_{S.ABCD}$.

Suy ra $\dfrac{V_{S.GMND}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{18}$. Do đó $m = 1; n = 18 \Rightarrow m = n = 19$.

Câu 21: Chọn D



Trong tam giác ABC có $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos 135^\circ \Leftrightarrow BC^2 + BC.a\sqrt{2} - 4a^2 = 0$
$\Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

Gọi K là hình chiếu của A lên BC ta có $ABC = 135^\circ$ nên $ABK = 45^\circ$. Suy ra tam giác AKB vuông cân tại K. Do đó $AK = BK = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi I, H lần lượt là hình chiếu của A lên BD và $(ABCD)$, ta có $KBIH$ là hình chữ nhật.

Khi đó $((ABD);(BCD)) = AIH = 30^\circ$. Suy ra $AH = HI.\tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

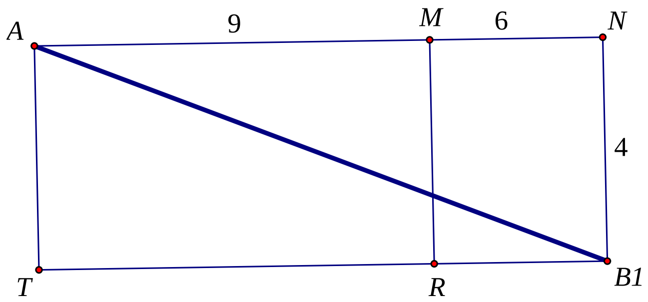
Từ đó ta tính được $BI = KH = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

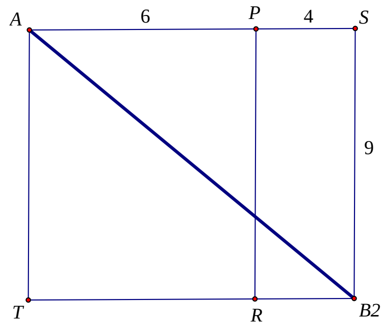
Tam giác ABD vuông tại A, đường cao AI nên $AB^2 = BI.BD \Rightarrow BD = \dfrac{AB^2}{BI} = a\sqrt{3}$.

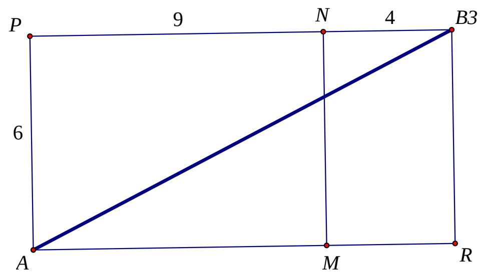
Vậy thể tích khối chóp $ABCD$ là $V = \dfrac{1}{6}AH.BD.BC = \dfrac{a^3}{6}$

Câu 22: Chọn B

Vì con kiến bò theo mặt của hình hộp từ A đến B nên khi ta vẽ hình khai triển của hình hộp chữ nhật và trải phẳng như hình vẽ thì xem như con kiến bò trên một mặt phẳng.







Khi đó B sẽ được tách thành 3 vị trí là B_1; B_2 và B_3. Quãng đường ngắn nhất sẽ là một trong ba đoạn thẳng AB_1; AB_2 hay AB_3. Ta có:

$AB_1 = \sqrt{15^2 + 4^2} = \sqrt{241}$.

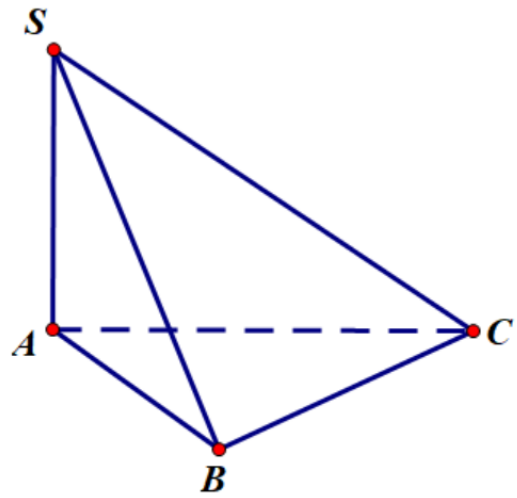
$AB_2 = \sqrt{9^2 + 10^2} = \sqrt{181} \approx 13,45$.

$AB_3 = \sqrt{6^2 + 13^2} = \sqrt{205}$.

Do đó quãng đường ngắn nhất là $AB_2 \approx 13,45 \in (13;14)$.

DẠNG 11 Khối đa diện trong đề thi của BGD&ĐT

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45^0 (tham khảo hình bên). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng



A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{3a^3}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3}{3}$ **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$ **C.** $V = a^3$ **D.** $V = 3a^3$

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng một góc $30°$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$ **B.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ **C.** $V = \frac{2a^3}{3}$ **D.** $V = \sqrt{2}a^3$

Câu 4: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $4a$, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD)$ và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{4a^3}{3}$. **B.** $\frac{64a^3}{81}$. **C.** $\frac{128a^3}{81}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 5: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $\frac{3\sqrt{3}a}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{9a^3}{16}$. **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** $\frac{9a^3}{32}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Câu 6: Cho hình chóp đều $ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M,N,P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCD),(SDA)$. Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{a^3}{48}$. **B.** $\frac{2a^3}{81}$. **C.** $\frac{a^3}{81}$. **D.** $\frac{a^3}{96}$.

Câu 7: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a và O là tâm đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đỗi xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{9}$. **B.** $\frac{20\sqrt{2}a^3}{81}$. **C.** $\frac{40\sqrt{2}a^3}{81}$. **D.** $\frac{10\sqrt{2}a^3}{81}$.

Câu 8: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xúng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$.

A. $\frac{2\sqrt{6}a^3}{9}$. **B.** $\frac{40\sqrt{6}a^3}{81}$. **C.** $\frac{10\sqrt{6}a^3}{81}$. **D.** $\frac{20\sqrt{6}a^3}{81}$.

Câu 9: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm của đáy. Gọi M,N,P,Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB,SBC,SCD,SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích khối chóp $S'MNPQ$ bằng

A. $\frac{40\sqrt{10}a^3}{81}$. **B.** $\frac{10\sqrt{10}a^3}{81}$. **C.** $\frac{20\sqrt{10}a^3}{81}$. **D.** $\frac{2\sqrt{10}a^3}{9}$.

Câu 10: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\frac{20\sqrt{14}a^3}{81}$. **B.** $\frac{40\sqrt{14}a^3}{81}$. **C.** $\frac{10\sqrt{14}a^3}{81}$. **D.** $\frac{2\sqrt{14}a^3}{9}$.

Câu 11: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm đáy. Gọi M,N,P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{8a^3}{81}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{16a^3}{81}$.

Câu 12: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB=a, SBA=SCA=90°$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng $60°$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Câu 13: Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng của B qua đường thẳng DE. Thể tích của khối đa diện

$ABCDSEF$ bằng

A. $\frac{7}{6}$ **B.** $\frac{11}{12}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{5}{6}$

Câu 14: Cho khối tứ diện có thể tích bằng V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{V'}{V}=\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{V'}{V}=\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{V'}{V}=\frac{5}{8}$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$

A. $V=3$ **B.** $V=4$ **C.** $V=6$ **D.** $V=5$

Câu 16: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông $BD=4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 60^0. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $48\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$. **C.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $16\sqrt{3}a^3$.

Câu 17: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD=2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng $60°$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. **B.** $6\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $2\sqrt{3}a^3$.

Câu 18: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD=4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)=30^o$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$ **B.** $48\sqrt{3}a^3$ **C.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$ **D.** $16\sqrt{3}a^3$

Câu 19: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD=2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30^0. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $6\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 20: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, $BAC=120°$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{3a^3}{8}$. **B.** $V=\frac{9a^3}{8}$. **C.** $V=\frac{a^3}{8}$. **D.** $V=\frac{3a^3}{4}$.

Câu 21: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=\sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ **B.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ **C.** $\sqrt{5}$ **D.** $\frac{\sqrt{15}}{3}$

Câu 22: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** 1

Câu 23: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là $1; 2$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $A'B'C'$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M=\frac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

Câu 24: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 2 **B.** 1 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Câu 25: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AC=2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$ và $AC'=4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $V=\frac{8}{3}$ **B.** $V=\frac{16}{3}$ **C.** $V=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ **D.** $V=\frac{16\sqrt{3}}{3}$

Câu 26: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M,N,P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', BCC'B', CDD'C'$ và $DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,D,M,N,P và Q bằng

A. 27. **B.** 30. **C.** 18. **D.** 36

Câu 27: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M,N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $\frac{14\sqrt{3}}{3}$. **B.** $8\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$.

Câu 28: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi *M, N, P* lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', ACC'A', BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $9\sqrt{3}$. **B.** $10\sqrt{3}$. **C.** $7\sqrt{3}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Câu 29: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao là 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $12\sqrt{3}$. **B.** $16\sqrt{3}$. **C.** $\frac{28\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{40\sqrt{3}}{3}$.

Câu 30: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng:

A. $27\sqrt{3}$. **B.** $21\sqrt{3}$. **C.** $30\sqrt{3}$. **D.** $36\sqrt{3}$.

Câu 31: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AA' và BB'. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 32: Cho tứ diện đều *ABCD* có cạnh bằng *a*. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB, BC* và *E* là điểm đối xứng với *B* qua **D.** Mặt phẳng chia khối tứ diện *ABCD* thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh *A* có thể tích *V*. Tính *V*.

Câu 33: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V=\frac{a^3}{3}$.

Câu 34: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD)

A. $h=\frac{2}{3}a$ **B.** $h=\frac{4}{3}a$ **C.** $h=\frac{8}{3}a$ **D.** $h=\frac{3}{4}a$

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;2)$ và đi qua điểm $A(1;-2;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 72 **B.** 216 **C.** 108 **D.** 36

Câu 36: Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC), tính $\cos\alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

A. $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{2}{3}$.

Câu 37: Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB=x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

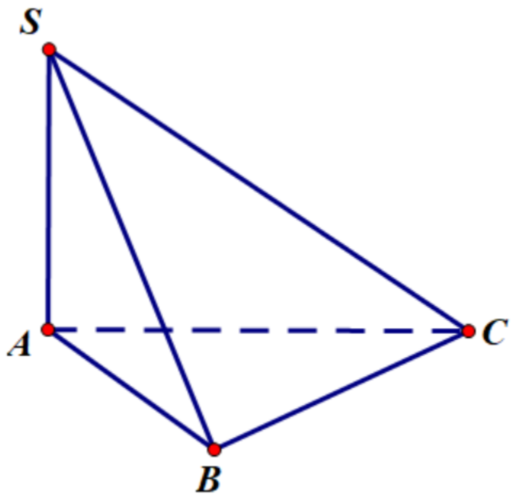
A. $x = \sqrt{6}$ **B.** $x = \sqrt{14}$ **C.** $x = 3\sqrt{2}$ **D.** $x = 2\sqrt{3}$

Câu 38: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $30°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{1}{8}a^3$. **B.** $\frac{3}{8}a^3$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

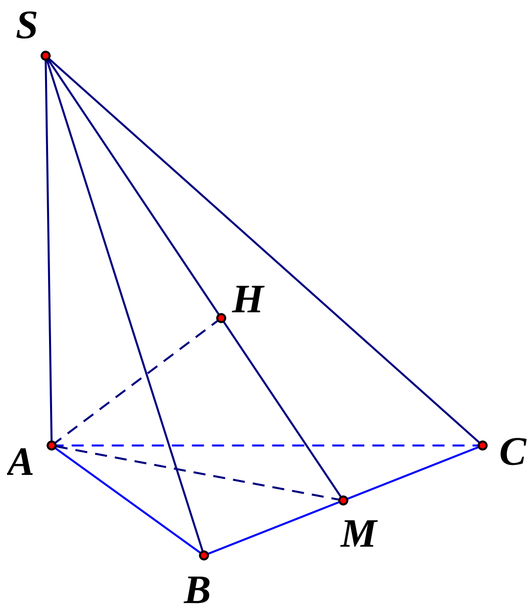
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45^0 (tham khảo hình bên). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng



A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{3a^3}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm BC thì $AM \perp BC$ và $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAM)$.

Kẻ $AH \perp SM$ tại H thì $AH \perp (SBC)$. Suy ra góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng $ASH = ASM = 45°$. Do đó, ΔSAM vuông cân ở A và $SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

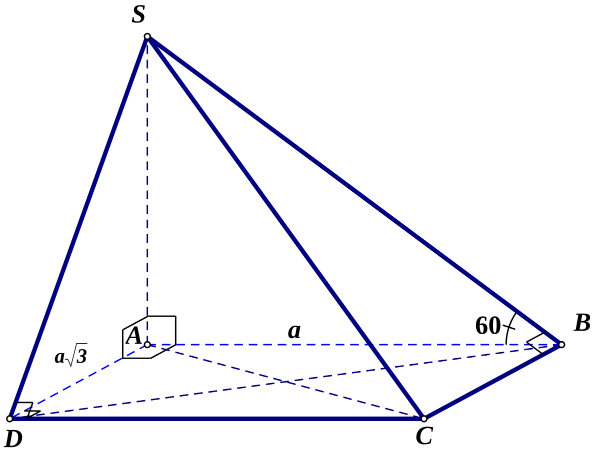
Suy ra $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}$.

Câu 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{a^3}{3}$ **B.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$ **C.** $V = a^3$ **D.** $V = 3a^3$

Lời giải

Chọn.C



Ta có $S_{ABCD} = \sqrt{3}a^2$.

Vì $\begin{cases} (SBC)\cap(ABCD) = BC \\ BC \perp SB \subset (SBC) \\ BC \perp AB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow ((SBC),(ABCD)) = (SB;AB) = SBA$.

Vậy $SBA = 60^o$

Xét tam giác vuông SAB có: $\tan 60^o = \dfrac{SA}{AB} \Rightarrow SA = AB.\tan 60^o = a\sqrt{3}$

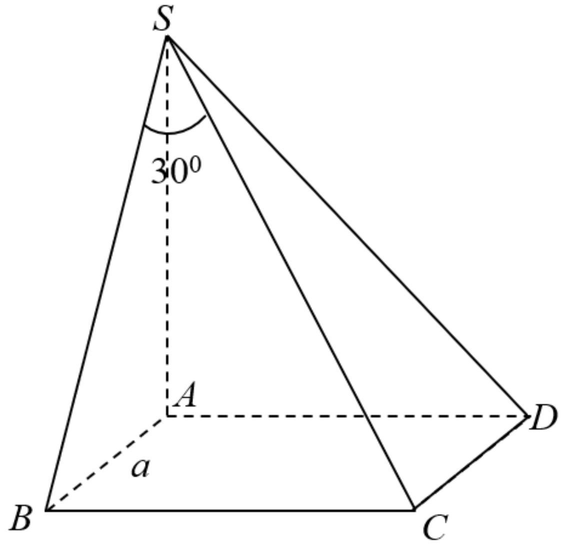
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}a^2\sqrt{3}.a\sqrt{3} = a^3$.

Câu 3: Cho khối chóp *S. ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a*, *SA* vuông góc với đáy và *SC* tạo với mặt phẳng một góc $30°$. Tính thể tích *V* của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$ **B.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$ **C.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$ **D.** $V = \sqrt{2}a^3$

Lời giải

Chọn B



$$\begin{cases} BC \perp BA & (ABCD \text{ lµ hinh vu«ng}) \\ BC \perp SA & (SA \perp (ABCD)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \left(SC,(SAB)\right) = BSC = 30^\circ$$

ΔSBC vuông tại B: $\tan 30^0 = \dfrac{BC}{SB} \Rightarrow SB = \dfrac{BC}{\tan 30^0} = \sqrt{3}a$

ΔSAB vuông tại A: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = \sqrt{2}a$

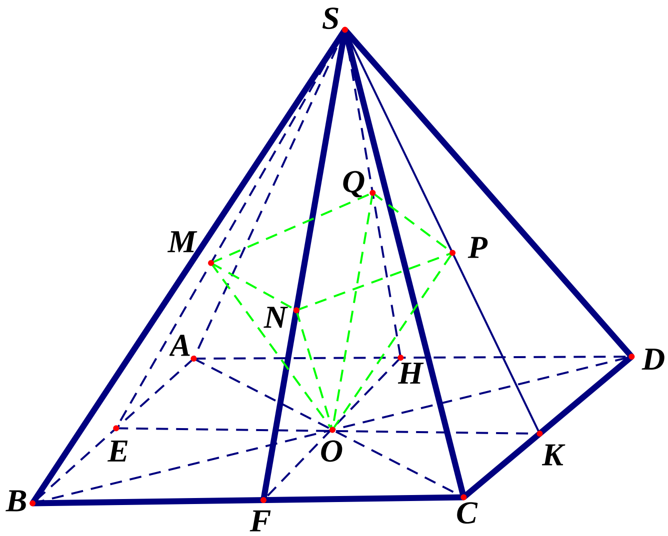
$$V = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\sqrt{2}a.a^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$

Câu 4: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $4a$, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCD)$ và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{4a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{64a^3}{81}$. **C.** $\dfrac{128a^3}{81}$. **D.** $\dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi E, F, K, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA và M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên $SE, SF, SK, SH \Rightarrow M, N, P, Q$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$.

Ta có $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{(2\sqrt{3}a)^2 - (2\sqrt{2}a)^2} = 2a = OE = OF = OK = OH$

$\Rightarrow$ các tam giác SOE, SOF, SOK, SOH vuông cân tại O và bằng nhau nên M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của của $SE, SF, SK, SH \Rightarrow MNPQ$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$

Mặt khác ta có $OM = ON = OP = OQ = a\sqrt{2} \Rightarrow O.MNPQ$ là hình chóp đều có tất cả các cạnh bằng $a\sqrt{2}$ nên có đường cao bằng $\sqrt{(a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\sqrt{2}\right)^2} = a$.

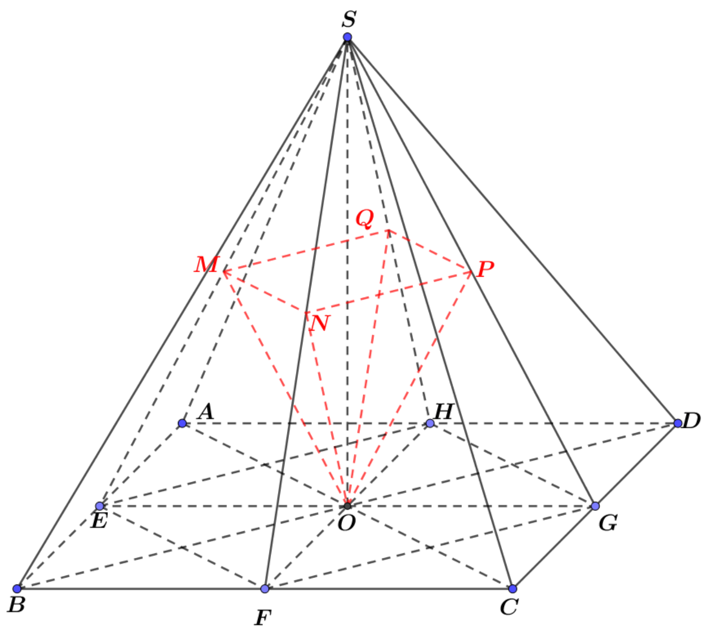
Khi đó thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng $\frac{1}{3}.a.(a\sqrt{2})^2 = \frac{2a^3}{3}$

Câu 5: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $\frac{3\sqrt{3}a}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{9a^3}{16}$. **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** $\frac{9a^3}{32}$. **D.** $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp OE \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOE) \Rightarrow (SAB) \perp (SOE)$.

Mặt khác: $(SAB) \cap (SOE) = SE$ đồng thời M là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (SAB) nên $OM \perp SE$ tại M.

Ta có: $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{3a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3a}{2}=OE$.

Khi đó tam giác SOE vuông cân tại O $\Rightarrow M$ là trung điểm SE.

Chứng minh tương tự ta cũng có N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SF,SG,SH.

Khi đó $d(O,(MNPQ))=d(S,(MNPQ))=\frac{1}{2}SO=\frac{3a}{4}$, $S_{MNPQ}=\frac{1}{4}S_{EFGH}=\frac{1}{8}S_{ABCD}=\frac{9a^2}{8}$.

Suy ra $V_{O.MNPQ}=\frac{1}{3}\cdot S_{MNPQ}.d(O,(MNPQ))=\frac{1}{3}.\frac{3a}{4}\cdot\frac{9a^2}{8}=\frac{9a^3}{32}$.

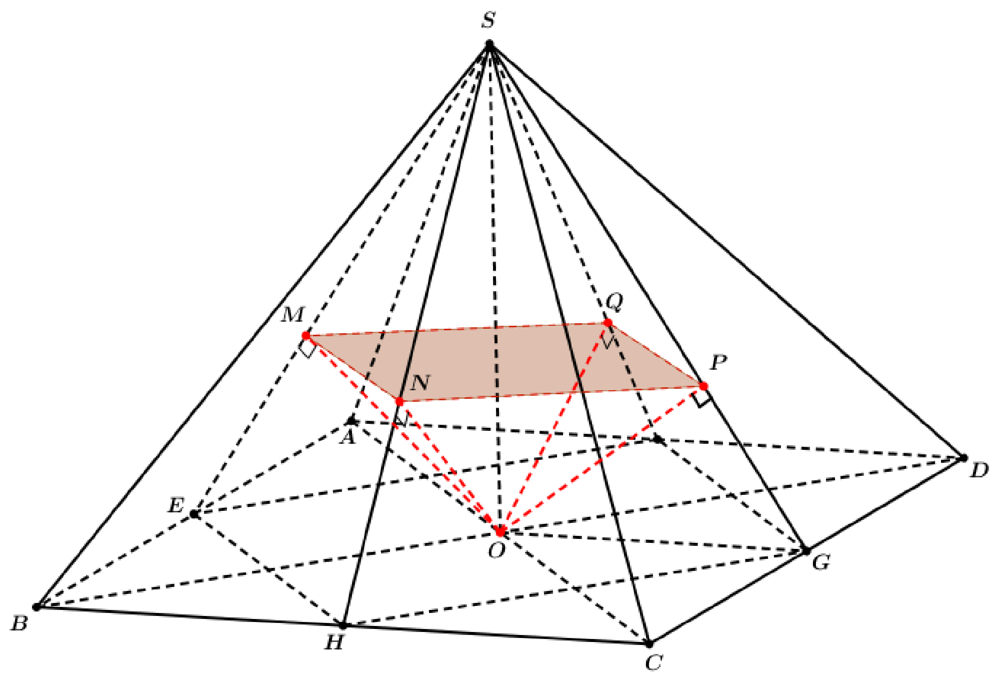
Vậy $V_{O.MNPQ}=\frac{9a^3}{32}$.

Câu 6: Cho hình chóp đều $ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M,N,P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCD),(SDA)$. Thể tích của khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{a^3}{48}$. **B.** $\frac{2a^3}{81}$. **C.** $\frac{a^3}{81}$. **D.** $\frac{a^3}{96}$.

Lời giải

Chọn D



Từ giả thiết ta có $OA=\frac{a\sqrt{2}}{2}, SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{2a^2}{4}}=\frac{a}{2}$.

Gọi E là trung điểm của AB, kẻ $OM\perp SE$ $(M\in SE)\Rightarrow OM\perp(SAB)$.

Và $\frac{SM}{SE}=\frac{SO^2}{SO^2+OE^2}=\frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow M$ là trung điểm của SE.

Chứng minh tương tự với các điểm N,P,Q.

$\Rightarrow$ Diện tích tứ giác $MNPQ$ là $\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2=\dfrac{a^2}{8}$ và $d\left(O;(MNPQ)\right)=\dfrac{1}{2}SO=\dfrac{a}{4}$.

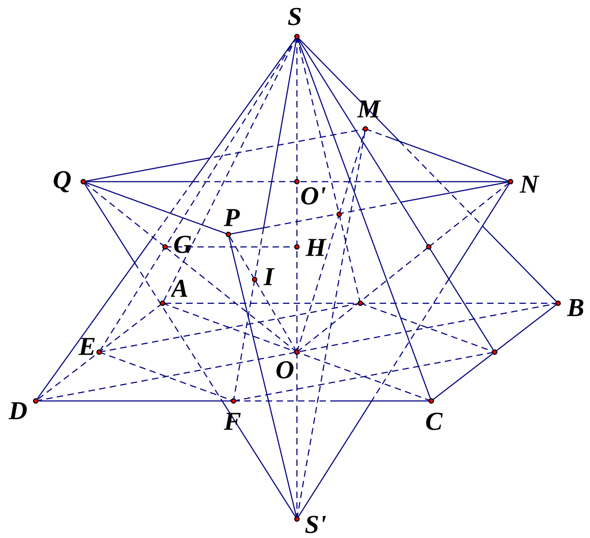
$\Rightarrow V_{O.MNPQ}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{4}.\dfrac{a^2}{8}=\dfrac{a^3}{96}$.

Câu 7: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a và O là tâm đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đỗi xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{9}$. **B.** $\dfrac{20\sqrt{2}a^3}{81}$. **C.** $\dfrac{40\sqrt{2}a^3}{81}$. **D.** $\dfrac{10\sqrt{2}a^3}{81}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $S.ABCD$ là hình chóp đều có tất cả các cạnh đều bằng a $\Rightarrow SO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi G,I lần lượt là trọng tâm các tam giác SDA, SDC.

Gọi E,F lần lượt là trung điểm $DA,\ DC$.

Ta có $GI=\dfrac{2}{3}EF,\ EF=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow GI=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Mà G,I lần lượt là trung điểm của OQ,OP $\Rightarrow QP=2GI=\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$.

Từ giả thiết cho dễ dàng suy ra được $MNPQ$ là hình vuông cạnh $PQ=\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$ $\Rightarrow S_{MNPQ}=\dfrac{8a^2}{9}$.

Gọi O' là tâm hình vuông $MNPQ$ kẻ $GH//QO'\left(H\in OO'\right)\Rightarrow H$ là trung điểm OO' (vì G là trung điểm OQ).

Ta có $QO'=\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2a}{3}$ và $OO'=2OH=2.\dfrac{1}{3}.SO=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

Theo giả thiết $OS' = OS = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow S'O' = S'O + OO' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} + \dfrac{a\sqrt{2}}{3} = \dfrac{5\sqrt{2}a}{6}$

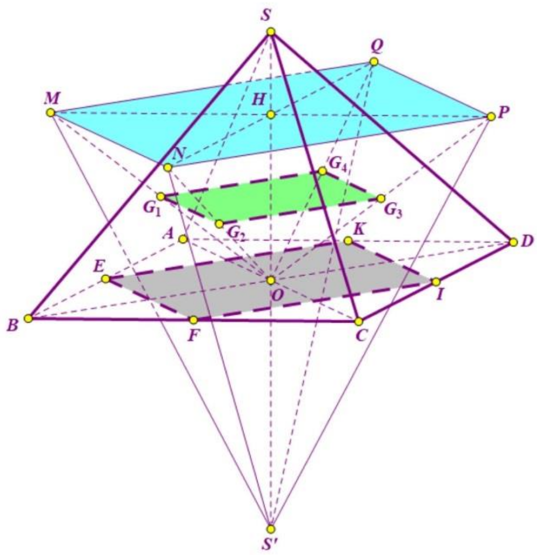
$V_{S'.MNPQ} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{5\sqrt{2}a}{6}.\dfrac{8a^2}{9} = \dfrac{20\sqrt{2}a^3}{81}$.

Câu 8: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xúng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$.

A. $\dfrac{2\sqrt{6}a^3}{9}$. **B.** $\dfrac{40\sqrt{6}a^3}{81}$. **C.** $\dfrac{10\sqrt{6}a^3}{81}$. **D.** $\dfrac{20\sqrt{6}a^3}{81}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA.

E, F, I, K lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA.

Ta có: $S_{MNPQ} = 4S_{G_1G_2G_3G_4} = 4.\dfrac{4}{9}S_{EFIK} = \dfrac{16}{9}\cdot\dfrac{1}{2}S_{ABCD} = \dfrac{8}{9}a^2$.

$$SO = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow S'H = S'O + OH = SO + \dfrac{2}{3}SO = \dfrac{5a\sqrt{6}}{6}.$$

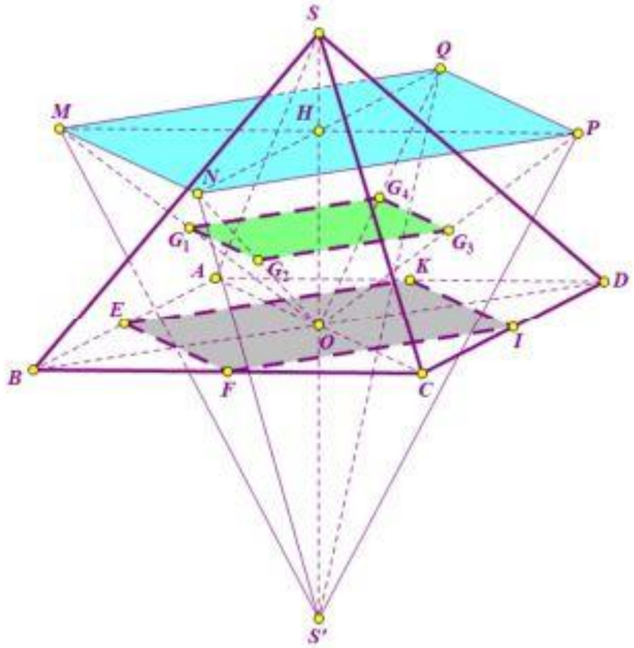
$$\Rightarrow V_{S'.MNPQ} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{5a\sqrt{6}}{6}\cdot\dfrac{8}{9}a^2 = \dfrac{20a^3\sqrt{6}}{81} \text{ (đvtt).}$$

Câu 9: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích khối chóp $S'MNPQ$ bằng

A. $\dfrac{40\sqrt{10}a^3}{81}$. **B.** $\dfrac{10\sqrt{10}a^3}{81}$. **C.** $\dfrac{20\sqrt{10}a^3}{81}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{10}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của $\Delta SAB, \Delta SBC, \Delta SCD, \Delta SAD$.

Do $G_1G_2 // G_3G_4 // EF; G_1G_2 = G_3G_4 = \frac{1}{2}EF \Rightarrow$ Tứ giác $G_1G_2G_3G_4$ là hình bình hành.

$\Rightarrow MN // PQ // G_1G_2, MN = PQ = 2G_1G_2 \Rightarrow$ Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Gọi $H = QN \cap MP$. Ta có: $\frac{SH}{SO} = \frac{1}{3}$.

Ta có: $SO = \sqrt{\left(\sqrt{3}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Ta có: $V_{S'.MNPQ} = 5.V_{S.MNPQ} = 5.2V_{S.G_1G_2G_3G_4} = 5.2.\left(\frac{2}{3}\right)^3.V_{S.EFIK} = \frac{80}{27}.V_{S.EFIK}$

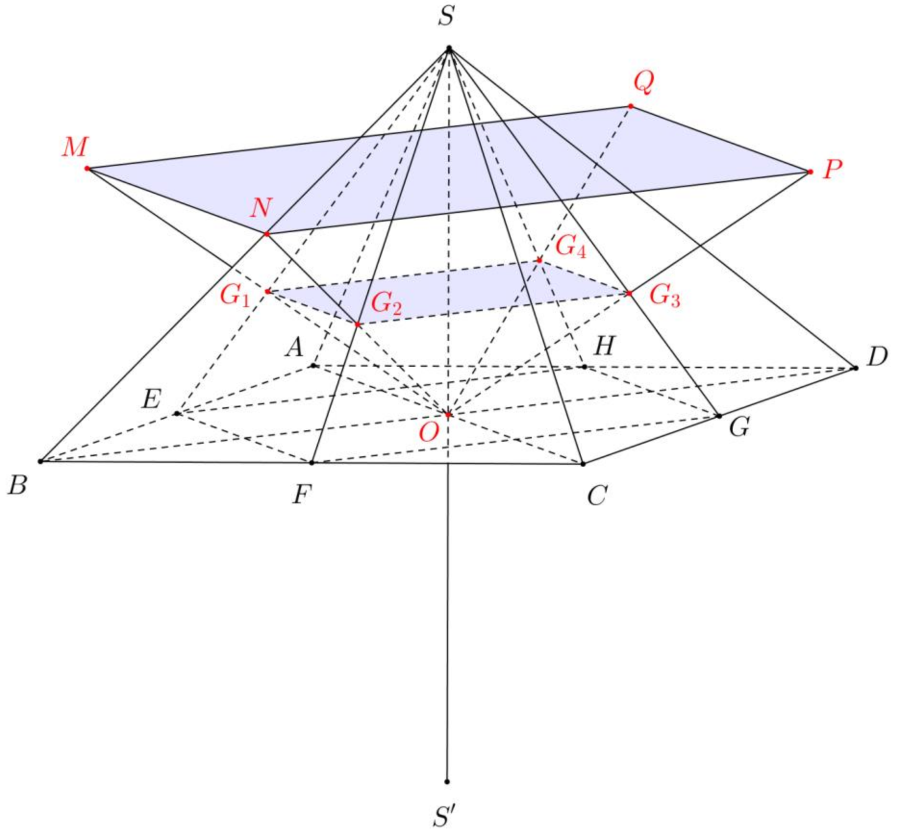
$= \frac{80}{27}.\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{10}}{2}.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{20\sqrt{10}a^3}{81}$.

Câu 10: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$ và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với O qua trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA và S' là điểm đối xứng với S qua O. Thể tích của khối chóp $S'.MNPQ$ bằng

A. $\frac{20\sqrt{14}a^3}{81}$. **B.** $\frac{40\sqrt{14}a^3}{81}$. **C.** $\frac{10\sqrt{14}a^3}{81}$. **D.** $\frac{2\sqrt{14}a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm $\Delta SAB, \Delta SBC, \Delta SCD, \Delta SDA$.

E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

Ta có $S_{MNPQ} = 4S_{G_1G_2G_3G_4} = 4.\frac{4}{9}S_{EFGH} = 4.\frac{4}{9}.\frac{1}{2}EG.HF = \frac{8a^2}{9}$.

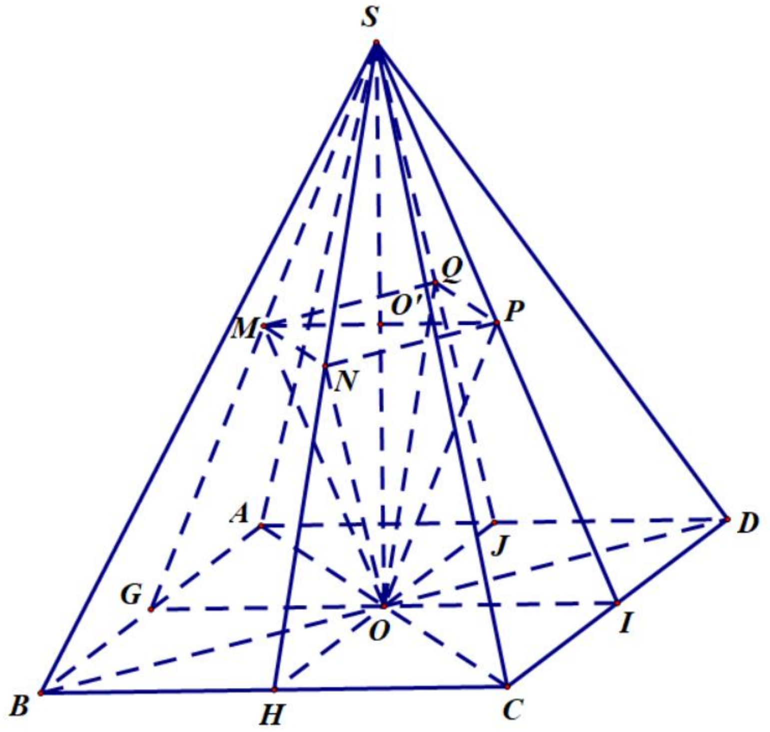
$$\begin{aligned} d\left(S',(MNPQ)\right) &= d\left(S',(ABCD)\right) + d\left(O,(MNPQ)\right) \\ &= d\left(S,(ABCD)\right) + 2d\left(O,(G_1G_2G_3G_4)\right) \\ &= d\left(S,(ABCD)\right) + \frac{2}{3}d\left(S,(ABCD)\right) \\ &= \frac{5}{3}d\left(S,(ABCD)\right) = \frac{5a\sqrt{14}}{6} \end{aligned}$$

Vậy $V_{S'.MNPQ} = \frac{1}{3}\cdot\frac{5a\sqrt{14}}{6}\cdot\frac{8a^2}{9} = \frac{20a^3\sqrt{14}}{81}$.

Câu 11: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và O là tâm đáy. Gọi M, N, P và Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD) và (SDA). Thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng

A. $\frac{8a^3}{81}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{16a^3}{81}$.

Lời giải



Chọn C

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên có $SO \perp (ABCD)$.

Xét tam giác SOA vuông tại O có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a$.

Gọi G, H, I, J lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

Ta có $AB \perp GO, AB \perp SO \Rightarrow AB \perp (SOG)$ mà $AB \perp (SAB)$ nên $(SGO) \perp (SAB)$ do đó M là hình chiếu vuông góc của O trên các mặt phẳng (SAB) suy ra $M \in SG$ và $OM \perp SG$.

Xét $\triangle SOG$ vuông tại O có $SO = OG = a$, $OM \perp SG$ nên M là trung điểm của SG.

Hoàn toàn tương tự có N, P, Q lần lượt là trung điểm của SH, SI, SJ.

Do đó dễ thấy $O.MNPQ$ là chóp tứ giác đều có đường cao $OO' = \frac{1}{2}SO = \frac{a}{2}$ và cạnh đáy $MN = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{4}AC = \frac{2a\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $O.MNPQ$ bằng $V_{O.MNPQ} = \frac{1}{3}OO'.S_{MNPQ} = \frac{1}{3}\frac{a}{2}.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^3}{12}$.

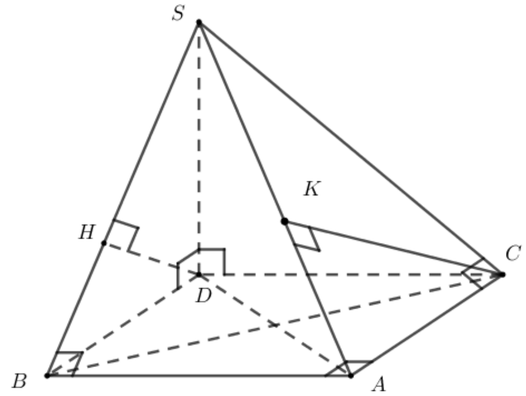
Câu 12: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB = a, SBA = SCA = 90°$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng $60°$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2}{2}$.

Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC).

Ta có $\begin{cases}AB\perp SB\\AB\perp SD\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SBD)\Rightarrow AB\perp BD$.

Tương tự, ta có $AC\perp CD$

$\Rightarrow ABDC$ là hình vuông cạnh a.

Đặt $SD=x, x>0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên $SB\Rightarrow DH=\frac{DB.DS}{\sqrt{DB^2+DS^2}}=\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

Ta có $\begin{cases}DH\perp SB\\DH\perp AB\end{cases}\Rightarrow DH\perp(SAB)\Rightarrow d\left(D,(SAB)\right)=DH=\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

Lại có $CD // AB\Rightarrow CD//(SAB)\Rightarrow d\left(C,(SAB)\right)=d\left(D,(SAB)\right)=DH$.

ΔSCA vuông tại C, có $AC=a, SC=\sqrt{x^2+a^2}$.

Kẻ $CK\perp SA\Rightarrow CK=\frac{CA.CS}{\sqrt{CA^2+CS^2}}=\frac{a.\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+2a^2}}$.

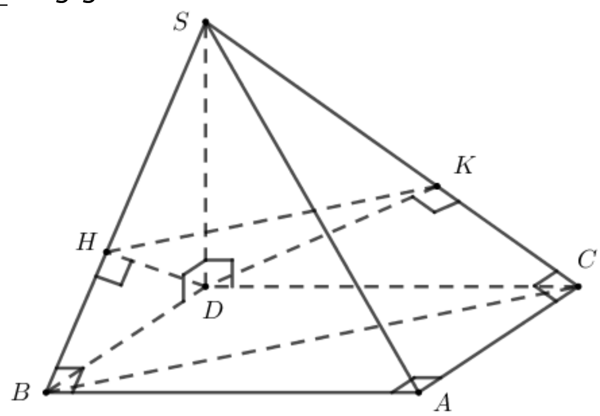
Vì $(SAB)\cap(SAC)=SA\Rightarrow \sin\left((SAB),(SAC)\right)=\frac{d\left(C,(SAB)\right)}{d(C,SA)}=\frac{DH}{CK}$

$$\Leftrightarrow \sin 60^\circ=\frac{\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}}{\frac{a\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+2a^2}}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{x\sqrt{x^2+2a^2}}{x^2+a^2}\Leftrightarrow 3\left(x^2+a^2\right)^2=4x^2\left(x^2+2a^2\right)\Rightarrow x=a.$$

$\Rightarrow DH=a$.

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SD=\frac{a^3}{6}$.

Cách 2:



Dựng hình vuông $ABCD \Rightarrow SD \perp (ABCD)$.

Đặt $SD = x, x > 0$.

Kẻ $DH \perp SB, (H \in SB) \Rightarrow DH \perp (SAB)$ và $DH = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Kẻ $DK \perp SC, (K \in SC) \Rightarrow DK \perp (SAC)$ và $DK = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Ta có $\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SC} = \frac{SD^2}{SB^2} = \frac{x^2}{x^2 + a^2} \Rightarrow HK // BD \Rightarrow HK = \frac{x^2}{x^2 + a^2} BD = \frac{x^2}{x^2 + a^2}.a\sqrt{2}$.

Ta có $\cos\left((SAB),(SAC)\right) = \left|\cos HDK\right| = \left|\frac{DH^2 + DK^2 - HK^2}{2DH.DK}\right|$

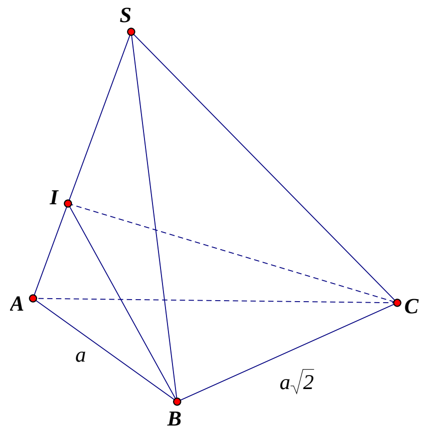
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \left|\frac{\frac{2x^2a^2}{x^2 + a^2} - \frac{2a^2x^4}{\left(x^2 + a^2\right)^2}}{\frac{2x^2a^2}{x^2 + a^2}}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \left|\frac{a^2}{x^2 + a^2}\right| \Leftrightarrow x = a.$$

$\Rightarrow SD = a.$

Lại có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}.SD = \frac{a^3}{6}$.

Cách trình bày khác



Hai tam giác vuông SAB và SAC bằng nhau chung cạnh huyền SA.

Kẻ BI vuông góc với SA suy ra CI cũng vuông góc với SA và $IB = IC$.

$SA \perp IC, SA \perp IB \Rightarrow SA \perp (IBC)$ tại I.

$V_{S.ABC} = V_{A.IBC} + V_{S.IBC} = \frac{1}{3}S_{\Delta IBC}AI + \frac{1}{3}S_{\Delta IBC}SI = \frac{1}{3}S_{\Delta IBC}(AI + SI) = \frac{1}{3}S_{\Delta IBC}SA$.

$((SAB),(SAC)) = (IB, IC) \Rightarrow (IB, IC) = 60^0 \Rightarrow BIC = 60^0$ hoặc $BIC = 120^0$.

Ta có $IC = IB < AB = a$ mà $BC = a\sqrt{2}$ nên tam giác IBC không thể đều suy ra $BIC = 120^0$.

Trong tam giác IBC đặt $IB = IC = x(x > 0)$ có:

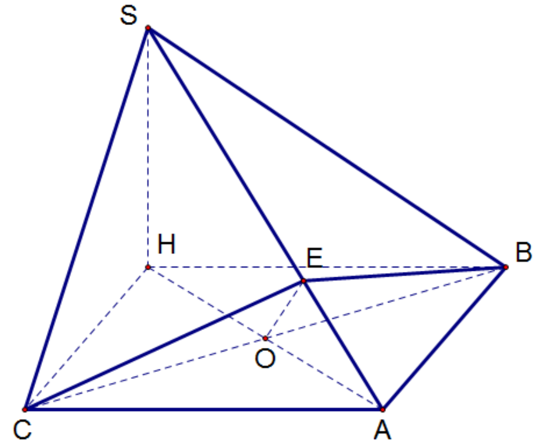
$$\cos 120^0 = \frac{IB^2 + IC^2 - BC^2}{2IB.IC} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{2x^2 - (a\sqrt{2})^2}{2x^2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow IB = IC = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trong tam giác ABI vuông tại I có: $AI = \sqrt{AB^2 - IB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SAB vuông tại B đường cao BI có: $AB^2 = IA.SA \Rightarrow SA = \frac{AB^2}{IA} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABC} == \frac{1}{3}S_{\Delta IBC}SA = \frac{1}{3}\frac{1}{2}IB.IC.SA\sin BIC = \frac{1}{6}\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 a\sqrt{3}\sin 120^0 = \frac{a^3}{6}$.

Cách trình bày khác



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC).

Theo bài ra, ta có $HC \perp CA, HB \perp BA \Rightarrow ABHC$ là hình vuông cạnh a.

Gọi $O = HA \cap BC$, E là hình chiếu của O lên SA.

Ta dễ dàng chứng minh được $EC \perp SA, EB \perp SA$.

Từ đó, ta được: góc giữa (SAC) và (SAB) là góc giữa EB và EC.

Vì $CAB = 90^0$ nên $BEC > 90^0 \Rightarrow BEC = 120^0$.

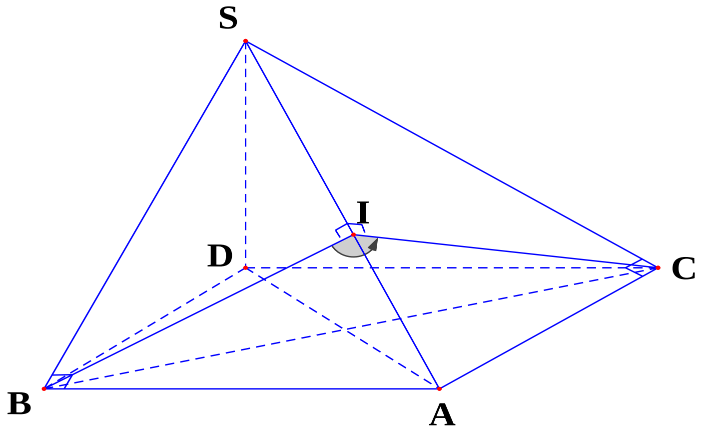
Ta dễ dàng chỉ ra được $OEB = OEC = 60^0$.

Đặt $SH = x \Rightarrow SA = \sqrt{x^2 + 2a^2} \Rightarrow OE = \frac{AO.SH}{SA} = \frac{xa\sqrt{2}}{2\sqrt{x^2 + 2a^2}}$.

$$\tan 60^0 = \frac{OC}{OE} \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{xa\sqrt{2}}{2\sqrt{x^2 + 2a^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = a.$$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{2}V_{S.HBAC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.a.a^2=\frac{a^3}{6}$.

Cách trình bày khác



Ta có $\Delta\perp SAB=\Delta\perp SAC$ và chung cạnh huyền S**A.** Kẻ $BI\perp(SA)\Rightarrow CI\perp(SA)$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là góc giữa hai đường thẳng BI và $CI\Rightarrow(BI;CI)=60°$.

Có $BC=a\sqrt{2}$, ΔBIC cân tại I. Do $BI=CI<AC=a<a\sqrt{2}=BC$ nên ΔBIC không đều $\Rightarrow BIC=120°\Rightarrow BI=CI=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Từ đó $AI=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $AB^2=AI.SA\Rightarrow SA=a\sqrt{3}$.

Dựng hình vuông $ABDC\Rightarrow SD\perp(ABDC)$.

Có: $SD=\sqrt{SA^2-AD^2}=a; S_{\Delta ABC}=a^2\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SD=\frac{a^3}{6}$.

HOẶC CÁCH KHÁC PPTHỂ TÍCH

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta IBC}.(SI+AI)=\frac{1}{3}S_{\Delta IBC}.SA$.

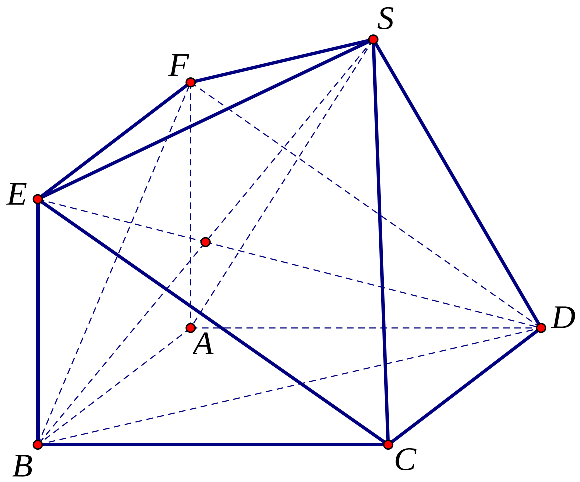
Với $S_{\Delta IBC}=\frac{1}{2}.IB.IC.sin120°=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{6}.a\sqrt{3}=\frac{a^3}{6}$.

Câu 13: Cho hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng của B qua đường thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

A. $\frac{7}{6}$ **B.** $\frac{11}{12}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{5}{6}$

Lời giải

Chọn D



Ta có:ADF.BCE là hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông cân

Dựa vào hình vẽ ta có:

$V_{ABCDSEF} = V_{ADF.BCE} + V_{S.CDFE} = V_{ADF.BCE} + V_{B.CDFE} = 2V_{ADF.BCE} - V_{BADE}$

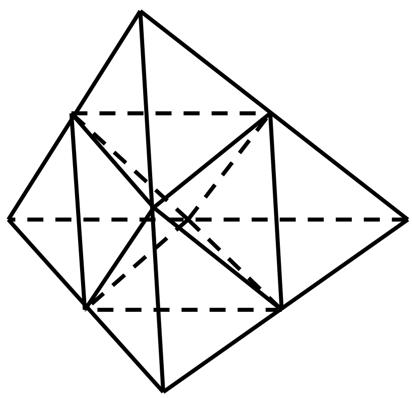
$V_{ADF.BCE} = AB.S_{\Delta BCE} = \frac{1}{2}; V_{BADE} = \frac{1}{3}AD.S_{\Delta ABE} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{ABCDSEF} = 2.\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Câu 14: Cho khối tứ diện có thể tích bằng V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$. **B.** $\frac{V'}{V} = \frac{1}{4}$. **C.** $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}$. **D.** $\frac{V'}{V} = \frac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Đặc biệt hóa tứ diện cho là tứ diện đều cạnh a. Hình đa diện cần tính có được bằng cách cắt 4 góc của tứ diện, mỗi góc cũng là một tứ diện đều có cạnh bằng $\frac{a}{2}$.

Do đó thể tích phần cắt bỏ là $V'' = 4.\frac{V}{8} = \frac{V}{2}$.

Vậy $V' = \frac{V}{2} \Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$.

Cách 2. Khối đa diện là hai khối chóp tứ giác có cùng đáy là hình bình hành úp lại. Suy ra:

$V' = 2V_{N.MEPF} = 4.V_{N.MEP} = 4.V_{P.MNE} = 4.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}V = \frac{1}{2}V$

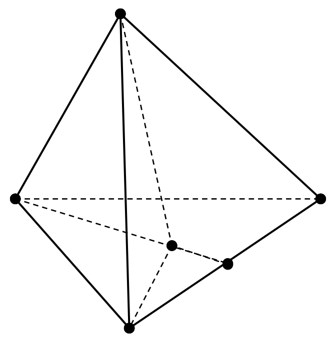
Cách 3. Ta có $\dfrac{V'}{V}=\dfrac{V-V_{A.QEP}-V_{B.QMF}-V_{C.MNE}-V_{D.NPF}}{V}$

$=1-\dfrac{V_{A.QEP}}{V}-\dfrac{V_{B.QMF}}{V}-\dfrac{V_{C.MNE}}{V}-\dfrac{V_{D.NPF}}{V}=1-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD**.** Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$

A. $V=3$ **B.** $V=4$ **C.** $V=6$ **D.** $V=5$

Lời giải



Chọn B

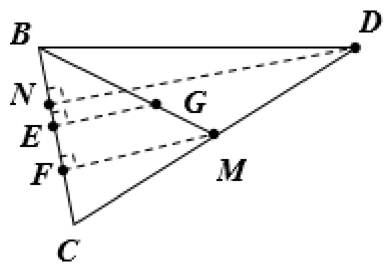
Cách 1:

Phân tích: tứ diện $ABCD$ và khối chóp $A.GBC$ có cùng đường cao là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD). Do G là trọng tâm tam giác BCD nên ta có $S_{\Delta BGC}=S_{\Delta BGD}=S_{\Delta CGD}$ $\Rightarrow S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta BGC}$ (xem phần chứng minh).

Áp dụng công thức thể tích hình chóp ta có:

$$\left.\begin{array}{l} V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}h.S_{\Delta BCD} \\ V_{A.GBC}=\dfrac{1}{3}h.S_{\Delta GBC}\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{V_{ABCD}}{V_{A.GBC}}=\dfrac{\dfrac{1}{3}h.S_{\Delta BCD}}{\dfrac{1}{3}h.S_{\Delta GBC}}=\dfrac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta GBC}}=3\Rightarrow V_{A.GBC}=\dfrac{1}{3}V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.12=4.$$

Chứng minh: Đặt $DN=h; BC=a$.



+) $MF // ND \Rightarrow \dfrac{MF}{DN}=\dfrac{CM}{CD}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow MF=\dfrac{1}{2}DN\Rightarrow MF=\dfrac{h}{2}$.

+) $GE // MF \Rightarrow \dfrac{GE}{MF}=\dfrac{BG}{BM}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow GE=\dfrac{2}{3}MF=\dfrac{2}{3}.\dfrac{h}{2}=\dfrac{h}{3}$

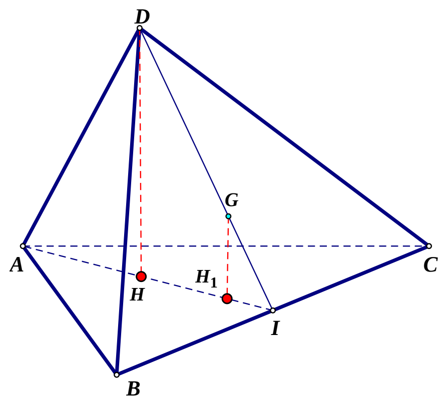
+) $\dfrac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta GBC}}=\dfrac{\frac{1}{2}DN.BC}{\frac{1}{2}GE.BC}=\dfrac{\frac{1}{2}ha}{\frac{1}{2}\frac{h}{3}a}=3\Rightarrow S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta GBC}$

+) Chứng minh tương tự có $S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta GBD}=3S_{\Delta GCD}\Rightarrow S_{\Delta BGC}=S_{\Delta BGD}=S_{\Delta CGD}$

Cách 2:

Ta có $\dfrac{d\left(G;(ABC)\right)}{d\left(D;(ABC)\right)}=\dfrac{GI}{DI}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow d\left(G;(ABC)\right)=\dfrac{1}{3}d\left(D;(ABC)\right)$.

Nên $V_{G.ABC}=\dfrac{1}{3}d\left(G;(ABC)\right).S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.V_{DABC}=4$

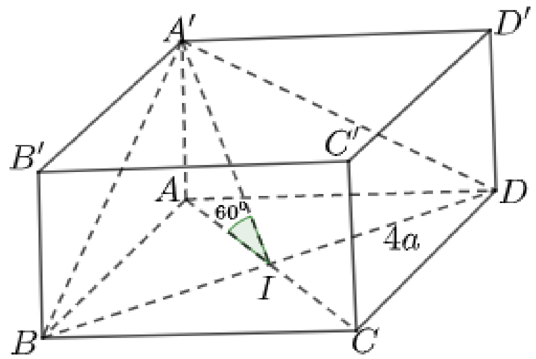


Câu 16: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông $BD=4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 60^0. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $48\sqrt{3}a^3$. **B.** $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}a^3$. **C.** $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có đáy $ABCD$ là hình vuông có $BD=4a\Rightarrow AB=2\sqrt{2}a$.

Gọi I trung điểm BD. Vì $BD=4a\Rightarrow BI=AI=2a$.

Tam giác $A'AI$ vuông tại A có: $\tan 60^0=\dfrac{A'A}{AI}\Rightarrow A'A=2\sqrt{3}a$.

Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng:

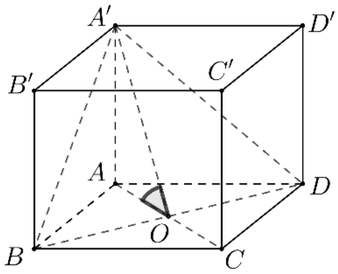
$V=S_{ABCD}.A'A=\left(2\sqrt{2}a\right)^2.2\sqrt{3}a=16\sqrt{3}a^3$.

Câu 17: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD=2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng $60°$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. **B.** $6\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D



+) Ta có $BD=2a\Rightarrow AC=2a;\ AB=a\sqrt{2}$.

+) $S_{ABCD}=\left(a\sqrt{2}\right)^2=2a^2$.

+) Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ là góc $A'OA\Rightarrow$ $AA'=AO\tan A'OA=a.\tan 60°=a\sqrt{3}$.

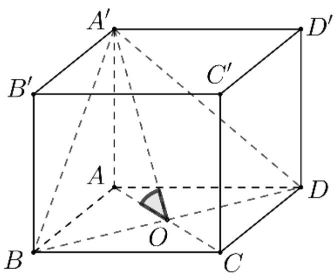
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=AA'.S_{ABCD}=a\sqrt{3}.2a^2=2\sqrt{3}a^3$.

Câu 18: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD=4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)=30^o$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$ **B.** $48\sqrt{3}a^3$ **C.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$ **D.** $16\sqrt{3}a^3$

Lời giải

Chọn C



Gọi O là trung điểm của BD. Ta có: $\Delta A'AB=\Delta A'AD$ suy ra $A'B=A'D$ suy ra $\Delta A'BD$ cân.

Mà $\begin{cases}(A'BD)\cap(ABCD)=BD\\ A'O\perp BD\\ AO\perp BD\end{cases}\Rightarrow \left((A'BD),(ABCD)\right)=A'OA=30°.=30^o$.

Xét $\Delta A'OA$ vuông tại A có: $\tan 30^o=\frac{A'A}{AO}=\frac{A'A}{\frac{AC}{2}}=\frac{A'A}{\frac{BD}{2}}=\frac{A'A}{2a}\Rightarrow A'A=2a\tan 30°=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Xét hình vuông $ABCD$ có: $BD = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = 2a\sqrt{2}.$

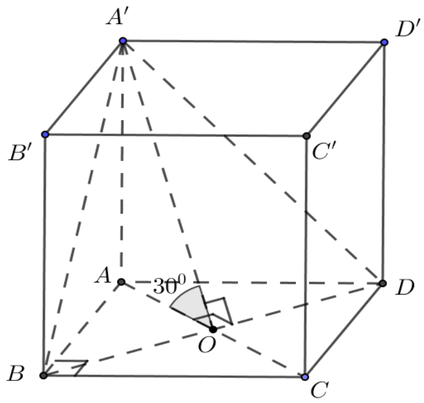
Vậy thể tích của khối hình hộp chữ nhật bằng: $V = A'A.AB^2 = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.\left(2a\sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}a^3.$

Câu 19: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30^0. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $6\sqrt{3}a^3$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Vì $BD \perp OA$ và $BD \perp AA'$ nên $BD \perp (A'OA) \Rightarrow BD \perp OA'$

Lại có $(A'BD) \cap (ABCD) = BD$. Do đó $\left((A'BD),(ABCD)\right) = A'OA = 30^0$ (Hình vẽ trên).

Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông có $BD = 2a$ nên $OA = a$ và $AB = AD = a\sqrt{2}$.

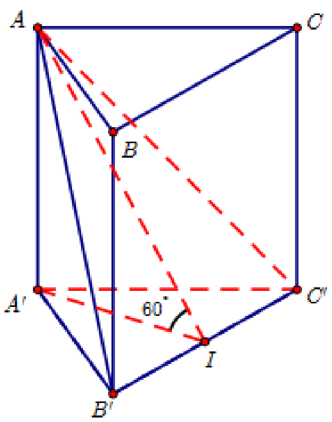
Xét tam giác $A'AO$ vuông tại A có $OA = a$ và $A'OA = 30^0$ nên $AA' = OA.\tan 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích khối hộp chữ nhật $V = AB.AD.AA' = a\sqrt{2}.a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 20: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $BAC = 120°$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{3a^3}{8}$. **B.** $V = \dfrac{9a^3}{8}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{8}$. **D.** $V = \dfrac{3a^3}{4}$.

Lời giải



Chọn A

Gọi I là trung điểm của $B'C'$.

Trong $\Delta A'B'C': B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 - 2A'B'.A'C'.\cos B'A'C' = 3a^2$

$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2}a.a.\sin 120° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $A'I = \frac{2S_{\Delta A'B'C'}}{B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \frac{a}{2}$

Ta có : $\begin{cases} (AB'C') \cap (A'B'C') = B'C' \\ AI \perp B'C' \\ A'I \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow AIA' = 60°$

Trong tam giác vuông AIA' có $AA' = A'I.\tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

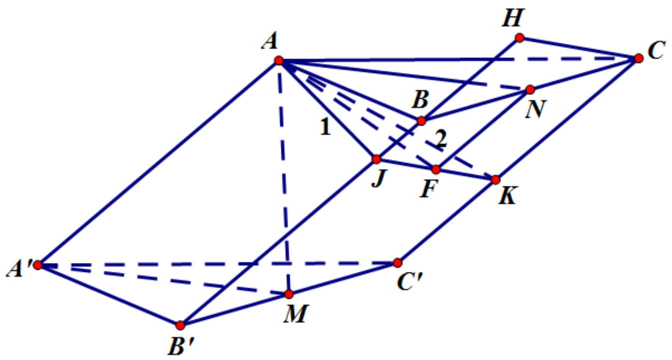
Vậy thể tích $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{8}$.

Câu 21: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ **B.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$ **C.** $\sqrt{5}$ **D.** $\frac{\sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Chọn B



Gọi J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB' và CC', H là hình chiếu vuông góc của C lên BB'

Ta có $AJ \perp BB'$ (1).

$AK \perp CC' \Rightarrow AK \perp BB'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BB' \perp (AJK) \Rightarrow BB' \perp JK \Rightarrow JK // CH \Rightarrow JK = CH = \sqrt{5}$.

Xét ΔAJK có $JK^2 = AJ^2 + AK^2 = 5$ suy ra ΔAJK vuông tại A.

Gọi F là trung điểm JK khi đó ta có $AF = JF = FK = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Gọi N là trung điểm BC, xét tam giác vuông ANF ta có:

$\cos NAF = \frac{AF}{AN} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow NAF = 60^\circ$. ($AN = AM = \sqrt{5}$ vì $AN // AM$ và $AN = AM$).

Vậy ta có $S_{\Delta AJK}=\frac{1}{2}AJ.AK=\frac{1}{2}.1.2=1\Rightarrow S_{\Delta AJK}=S_{\Delta ABC}.\cos 60^\circ\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{S_{\Delta AJK}}{\cos 60^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

Xét tam giác AMA' vuông tại M ta có $MAA'=AMF=30^\circ$ hay $AM=A'M.\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

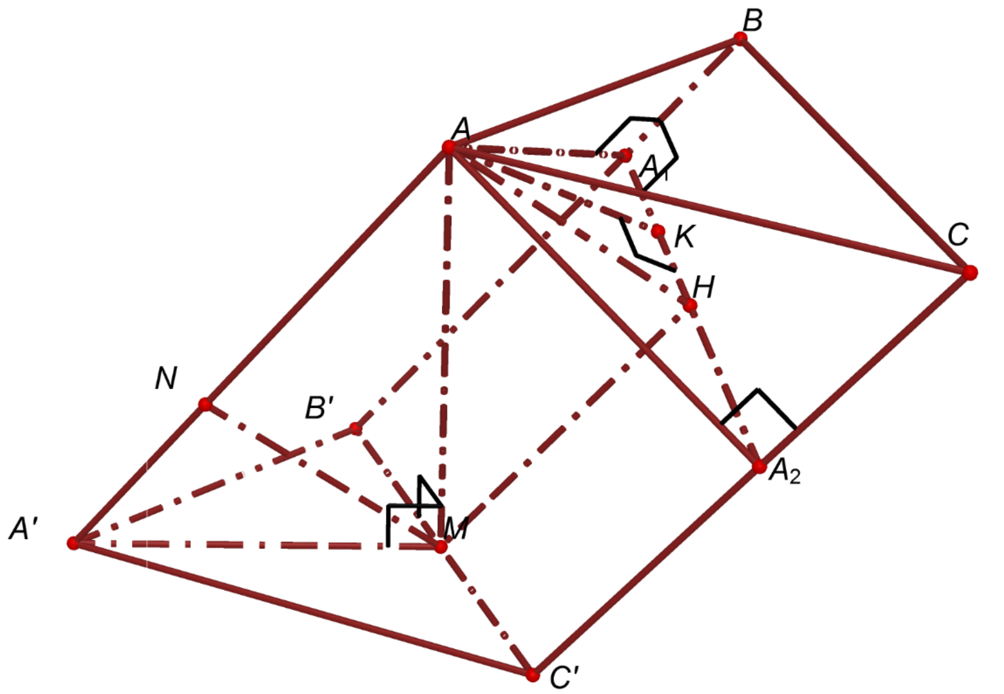
Vậy thể tích khối lăng trụ là $V=AM.S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{15}}{3}.2=\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

Câu 22: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** 1

Lời giải

Chọn B



Gọi A_1,A_2 lần lượt là hình chiếu của A trên BB', CC'. Theo đề ra $AA_1=1; AA_2=\sqrt{3}; A_1A_2=2.$

Do $AA_1^2+AA_2^2=A_1A_2^2$ nên tam giác AA_1A_2 vuông tại A.

Gọi H là trung điểm A_1A_2 thì $AH=\frac{A_1A_2}{2}=1.$

Lại có $MH\parallel BB'\Rightarrow MH\perp(AA_1A_2)\Rightarrow MH\perp AH$ suy ra $MH=\sqrt{AM^2-AH^2}=\sqrt{3}$.

nên $\cos((ABC),(AA_1A_2))=\cos(MH,AM)=\cos HMA=\frac{MH}{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Suy ra $S_{ABC}=\frac{S_{AA_1A_2}}{\cos((ABC),(AA_1A_2))}=1.$ Thể tích lăng trụ là $V=AM\cdot S_{ABC}=2$.

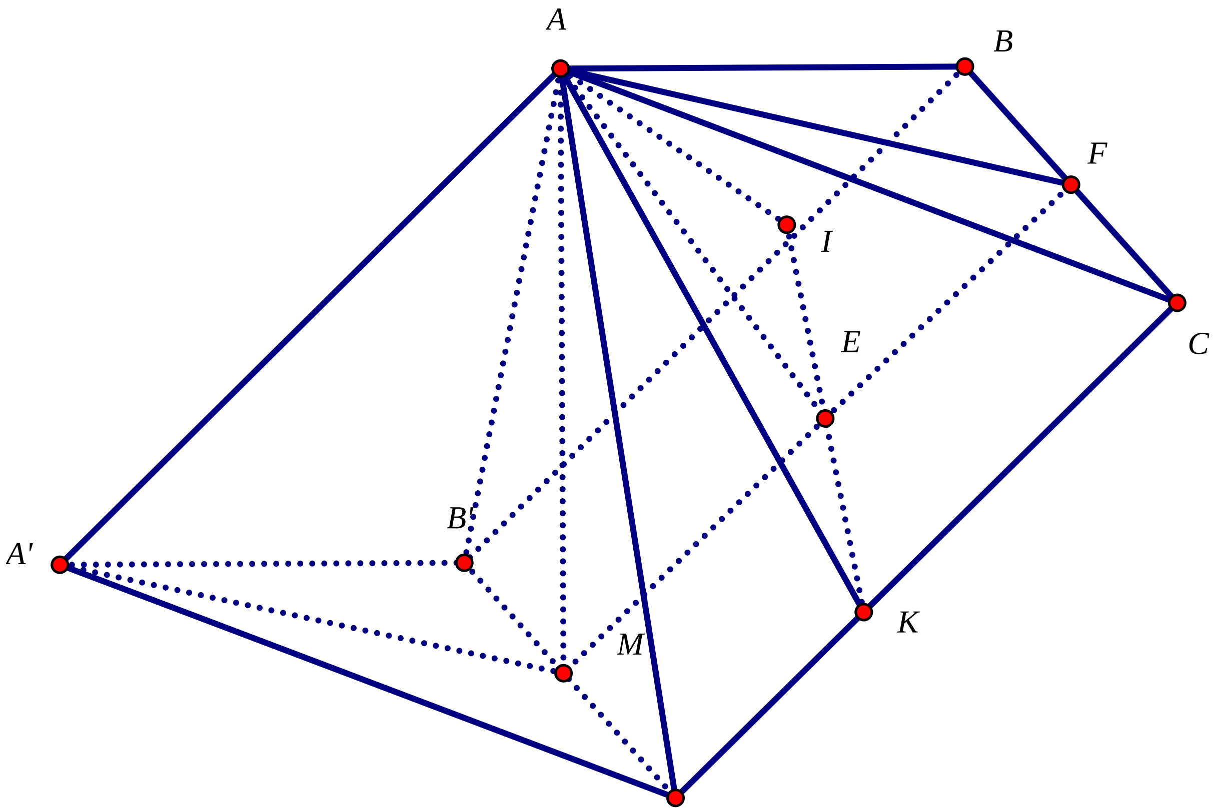
Nhận xét. Ý tưởng câu này là dùng diện tích hình chiếu $S'=S\cos\alpha$.

Câu 23: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là $1; 2$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $A'B'C'$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M = \frac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Chọn D



Kẻ $AI \perp BB'$, $AK \perp CC'$ (hình vẽ).

Khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là $1; 2 \Rightarrow AI = 1$, $AK = 2$.

Gọi F là trung điểm của BC. $A'M = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{15}}{3}$

Ta có $\left.\begin{matrix} AI \perp BB' \\ BB' \perp AK \end{matrix}\right\} \Rightarrow BB' \perp (AIK) \Rightarrow BB' \perp IK$.

Vì $CC' \parallel BB' \Rightarrow d(C, BB') = d(K, BB') = IK = \sqrt{5} \Rightarrow \Delta AIK$ vuông tại A.

Gọi E là trung điểm của IK $\Rightarrow EF \parallel BB'$ $\Rightarrow EF \perp (AIK) \Rightarrow EF \perp AE$.

Lại có $AM \perp (ABC)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AIK) là góc giữa EF và AM bằng góc $AME = FAE$. Ta có $\cos FAE = \frac{AE}{AF} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow FAE = 30°$.

Hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (AIK) là ΔAIK nên ta có:

$$S_{AIK} = S_{ABC}\cos EAF \Rightarrow 1 = S_{ABC}\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} = S_{ABC}.$$

Xét ΔAMF vuông tại A: $\tan AMF = \dfrac{AF}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow AM = \sqrt{5}$.

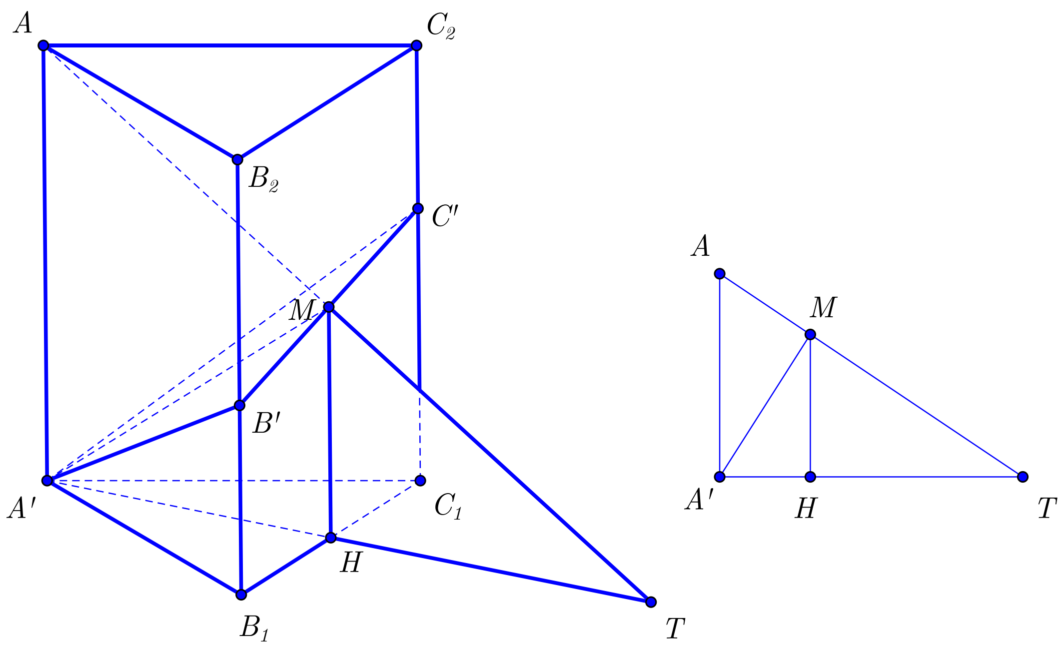
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{5}.\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

Câu 24: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 2 **B.** 1 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn A



Cắt lăng trụ bởi một mặt phẳng qua A' và vuông góc với AA' ta được thiết diện là tam giác $A'B_1C_1$ có các cạnh $A'B_1 = 1$; $A'C_1 = \sqrt{3}$; $B_1C_1 = 2$.

Suy ra tam giác $A'B_1C_1$ vuông tại A' và trung tuyến $A'H$ của tam giác đó bằng 1.

Gọi giao điểm của AM và $A'H$ là T.

Ta có: $A'M = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $A'H = 1 \Rightarrow MH = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra $MA'H = 30°$.

Do đó $MA'A = 60° \Rightarrow AA' = \dfrac{A'M}{\cos MA'A} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

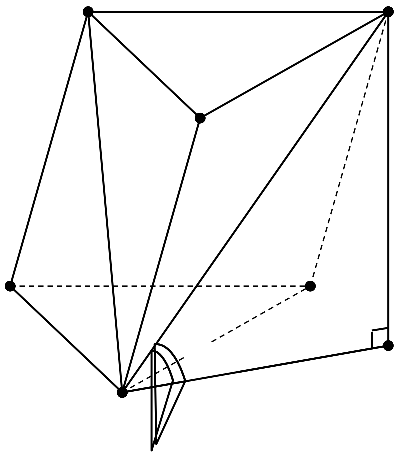
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng thể tích khối lăng trụ $A'B_1C_1.AB_2C_2$ và bằng $V = AA'.S_{A'B_1C_1} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$.

Câu 25: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AC = 2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$ và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $V = \frac{8}{3}$ **B.** $V = \frac{16}{3}$ **C.** $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ **D.** $V = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn D



Phân tích: Tính thể tích của khối đa diện $ABCB'C'$ bằng thể tích khối của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ trừ đi thể tích của khối chóp $A.A'B'C'$.

Giả sử đường cao của lăng trụ là $C'H$. Khi đó góc giữa AC' mặt phẳng (ABC) là góc $C'AH = 60°$.

Ta có: $\sin 60° = \frac{C'H}{AC'} \Rightarrow C'H = 2\sqrt{3}; S_{\Delta ABC} = 4$; $V_{ABC.A'B'C'} = C'H.S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{3}.\frac{1}{2}.\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8\sqrt{3}$.

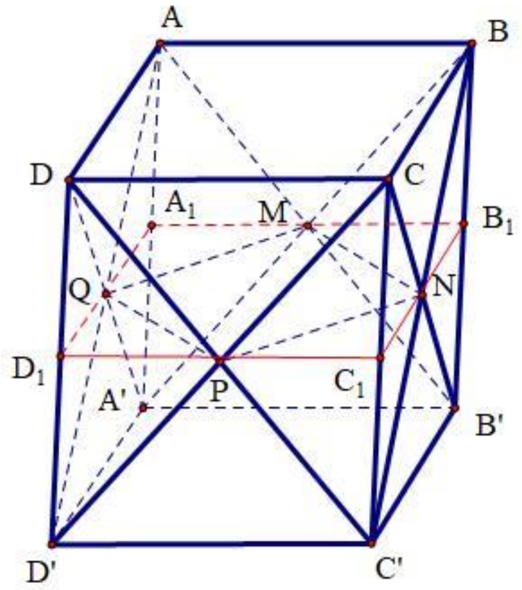
$V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3}C'H.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.V_{ABC.A'B'C'} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$; $V_{ABB'C'C} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = 8\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Câu 26: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có chiều cao bằng 8 và diện tích đáy bằng 9. Gọi M, N, P và Q lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', BCC'B', CDD'C'$ và $DAA'D'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, D, M, N, P và Q bằng

A. 27. **B.** 30. **C.** 18. **D.** 36

Lời giải

Chọn B



Mặt $(MNPQ)$ cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' tại A_1, B_1, C_1, D_1. Thể tích khối đa diện cần tìm là V, thì:

$$V = V_{A_1B_1C_1D_1.A'B'C'D'} - V_{A'.QMA_1} - V_{B'.MNB_1} - V_{C'.PNC_1} - V_{D'.QPD_1}$$
$$= \frac{8.9}{2} - 4\times\frac{V}{24}$$
$$\Rightarrow V = 30$$

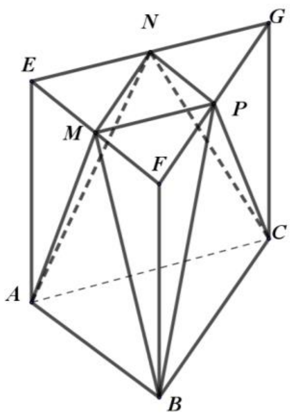
Câu 27: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 4 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $\frac{14\sqrt{3}}{3}$. **B.** $8\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:



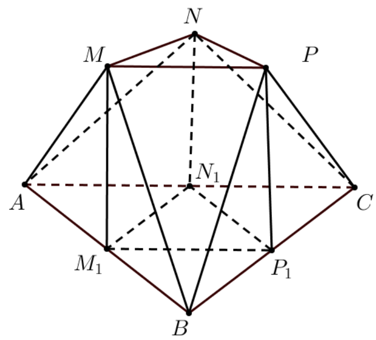
Chia đôi khối lăng trụ bằng mặt phẳng (MNP). Khi đó ta có $(MNP)\cap BB' = \{F\}$ thì $V_{ABC.EFG} = \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'}$

Lại có $V_{ABC.MNP} = V_{ABC.EFG} - V_{B.MPF} - V_{A.EMN} - V_{C.NPG}$

Dễ thấy $V_{B.MPF} = V_{A.EMN} = V_{C.NPG} = \frac{1}{4}V_{ABC.EFG} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{8}V_{ABC.A'B'C'}$

Tức là $V_{ABC.MNP} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{8}.\frac{4.4^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}.$

Cách 2



$S_{ABC} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$; $V_{ABC.A'B'C'} = V$

Hạ M_1, N_1, P_1 lần lượt vuông góc AB, AC, BC ,

khi đó M_1, N_1, P_1 lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC

Khi đó $V_{ABCMNP} = V_{MNP.M_1N_1P_1} + V_{B.MPP_1M_1} + V_{C.NPP_1N_1} + V_{A.MNN_1M_1}$

Dễ thấy $S_{MNP} = \frac{1}{4}S_{ABC}$; $MM_1 = \frac{1}{2}AA'$ nên $V_{MNP.M_1N_1P_1} = \frac{1}{8}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{8}V$

Do đáy là tam giác đều nên $V_{B.MPP_1M_1} = V_{C.NPP_1N_1} = V_{A.MNN_1M_1}$

Ta có $d\left(B;\left(MPP_1M_1\right)\right) = \frac{1}{2}d\left(B;\left(ACC'A'\right)\right)$; $S_{MPP_1M_1} = \frac{1}{4}S_{ACC'A'}$ nên

$V_{B.MPP_1M_1} = \frac{1}{8}V_{B.ACC'A'} = \frac{1}{8}.\frac{2}{3}V = \frac{1}{12}V$.

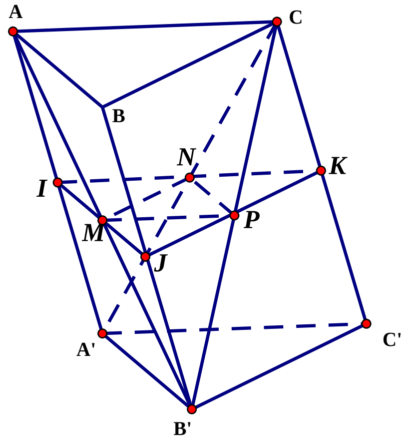
Do đó $V_{ABCMNP} = \frac{1}{8}V + \frac{1}{12}V + \frac{1}{12}V + \frac{1}{12}V = \frac{3}{8}V = \frac{3}{8}.4.4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Câu 28: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi *M*, *N*, *P* lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A', ACC'A', BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $9\sqrt{3}$. **B.** $10\sqrt{3}$. **C.** $7\sqrt{3}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



$V_{ABC.A'B'C'} = 6.16\dfrac{\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$,

Thể tích cần tìm là $V_1 = V_{ABC.MNP} = V_{A'B'C'.MNP}$

$V_2 = V_{A'.AMN} = V_{B'.BMP} = V_{C'CNP}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 2V_1 + 3V_2$

$S_{AMN} = \dfrac{1}{4}S_{AB'C'} \Rightarrow V_2 = \dfrac{1}{4}V_{A'.AB'C'} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{12}V_{ABC.A'B'C'}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 2V_1 + \dfrac{1}{4}V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_1 = \dfrac{3}{8}V_{ABC.A'B'C'} = 9\sqrt{3}$

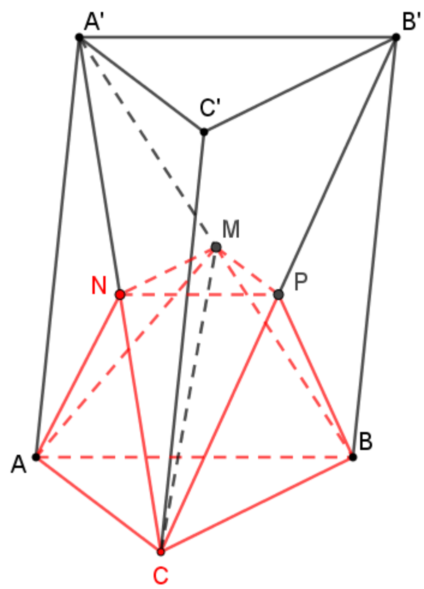
Câu 29: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao là 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $12\sqrt{3}$. **B.** $16\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:



Ta có $V = V_{ABCA'B'C'} = 8.\dfrac{4^2.\sqrt{3}}{4} = 32\sqrt{3}$, gọi $h = d\left(A',(ABC)\right)$.

Ta có $V_{MABC} = \frac{1}{3}.\frac{h}{2}.S_{ABC} = \frac{V}{6}$.

$V_{MNPC} = \frac{1}{3}.\frac{h}{2}.\frac{S_{ABC}}{4} = \frac{V}{24}$.

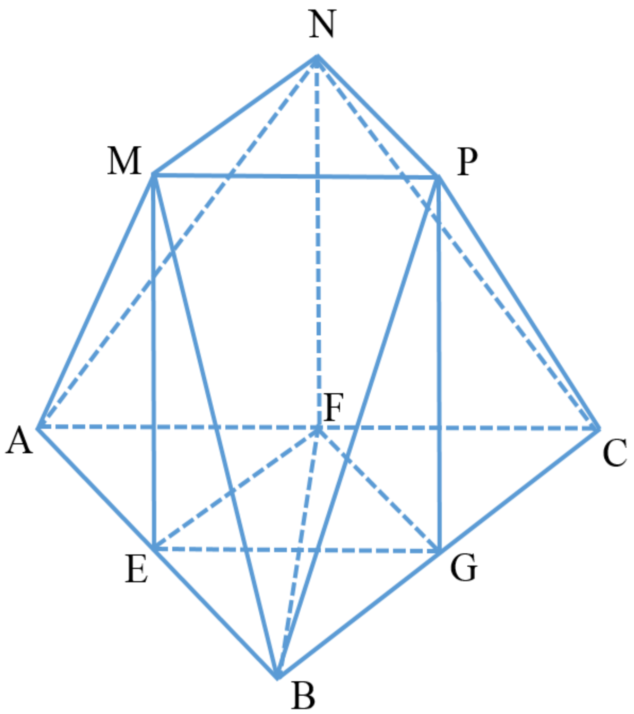
$V_{MBCP} = \frac{1}{3}.d\left(M,(PBC)\right).S_{PBC} = \frac{1}{3}\frac{d\left(A',(BCC'B')\right)}{2}.\frac{S_{BCC'B'}}{4} = \frac{V_{A'.BCC'B'}}{8} = \frac{V}{12}$.

Tương tự $V_{MNAC} = \frac{V}{12}$.

Vậy $V_{MNPABC} = V_{MABC} + V_{MNAC} + V_{MNPC} + V_{MBCP} = \frac{3V}{8} = 12\sqrt{3}$.

Cách 2:

Đặc biết hóa cho lăng trụ đứng.



Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC.

Ta có: $V_{MNP.EFG} = ME.S_{EFG} = 4\sqrt{3}$.

$V_{B.MEGP} = \frac{1}{3}d\left(B,(MEGP)\right).S_{MEGP} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}BF.ME.EG = \frac{1}{3}.\sqrt{3}.4.2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự: $V_{A.MNFE} = V_{C.PNFG} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

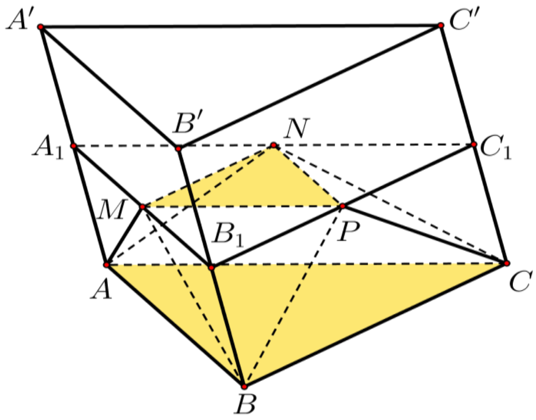
Vậy $V_{MNPABC} = V_{MNP.EFG} + V_{B.MEGP} + V_{A.MNFE} + V_{C.PNFG} = 4\sqrt{3} + 3.\frac{8\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3}$.

Câu 30: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 8 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 6. Gọi M, N và P lần lượt là tâm của các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$ và $BCC'B'$. Thể tích của khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng:

A. $27\sqrt{3}$. **B.** $21\sqrt{3}$. **C.** $30\sqrt{3}$. **D.** $36\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC'.

Khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có chiều cao là 4 là tam giác đều cạnh 6.

Ba khối chóp $A.A_1MN$, BB_1MP, CC_1NP đều có chiều cao là 4 *và cạnh là tam giác đều cạnh* 3

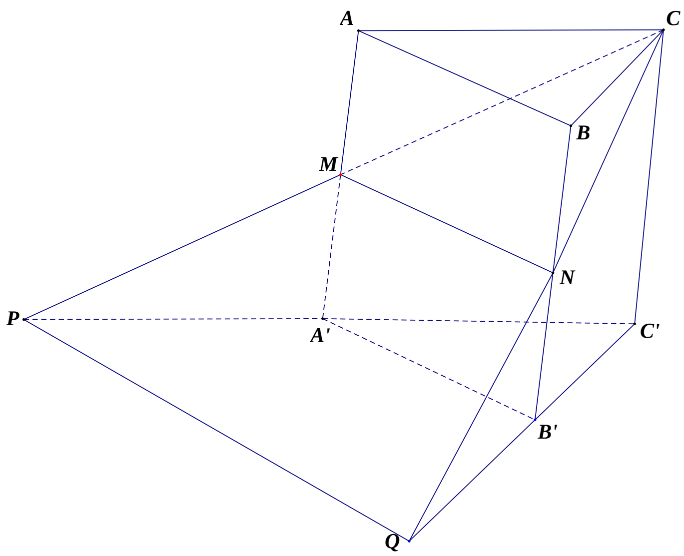
Ta có: $V_{ABC.MNP} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - \left(V_{A.A_1MN} + V_{B.B_1MP} + V_{C.C_1NP}\right) \quad = \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4}\cdot 4 - 3\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9\sqrt{3}}{4}\cdot 4 = 27\sqrt{3}$

Câu 31: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AA' và BB'. Đường thẳng CM cắt đường thẳng $C'A'$ tại P, đường thẳng CN cắt đường thẳng $C'B'$ tại Q. Thể tích của khối đa diện lồi $A'MPB'NQ$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



+) Ta có A' là trung điểm PC'; B' là trung điểm QC'. Do đó $S_{C'PQ} = 4S_{C'A'B'} \Rightarrow \dfrac{S_{C'PQ}}{S_{C'A'B'}} = 4$.

+) $V_{C.C'PQ} = \dfrac{S_{C'PQ}}{S_{C'A'B'}}.V_{C.A'B'C'} = 4V_{C.A'B'C'} = 4\left(\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}\right) = \dfrac{4}{3}$.

+) Mặt khác $V_{A'B'C'.MNC} = \dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{A'M}{A'A} + \dfrac{B'N}{B'B} + \dfrac{C'C}{C'C}\right)V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + 1\right)V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{2}{3}$.

+) Do đó $V_{A'MPB'NQ} = V_{C.C'PQ} - V_{A'B'C'.MNC} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$.

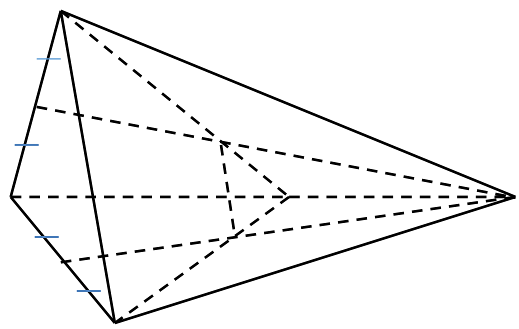
Câu 32: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và E là điểm đối xứng với B qua ***D***. Mặt phẳng chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A có thể tích V. Tính V.

A. $V=\frac{7\sqrt{2}a^3}{216}$ **B.** $V=\frac{11\sqrt{2}a^3}{216}$ **C.** $V=\frac{13\sqrt{2}a^3}{216}$ **D.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{18}$

Lời giải

Chọn B

(MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành 2 khối đa diện (H_1): $AC.MNPQ$ và (H_2): $BD.MNPQ$



(MNE) cắt AD tại Q, cắt CD tại P.

$$V_{AC.MNPQ}=V_{E.AMNC}-V_{E.ACPQ}$$

$$V_{E.AMNC}=\frac{1}{3}d\left(E,(AMNC)\right).S_{AMNC}$$

$$=\frac{1}{3}d\left(E,(ABC)\right).\left(S_{\Delta ABC}-S_{\Delta BMN}\right)$$

$$=\frac{1}{3}d\left(E,(ABC)\right).\left(S_{\Delta ABC}-\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}\right)$$

$$=\frac{1}{3}.2.d\left(\mathrm{D},(ABC)\right).\frac{3}{4}S_{\Delta ABC}=\frac{3}{2}V_{ABCD}$$

$$V_{E.ACPQ}=\frac{1}{3}d\left(E,(ACPQ)\right).S_{ACPQ}=\frac{1}{3}d\left(\mathrm{B},(ACD)\right).\left(S_{\Delta ACD}-S_{\Delta DPQ}\right)=\frac{1}{3}d\left(\mathrm{B},(ACD)\right).\frac{8}{9}S_{\Delta ACD}=\frac{8}{9}V_{ABCD}$$

$$V_{AC.MNPQ}=\frac{3}{2}V_{ABCD}-\frac{8}{9}V_{ABCD}=\frac{11}{18}V_{ABCD}=\frac{11}{18}.\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{11\sqrt{2}}{216}a^3$$

Câu 33: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V=\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Kẻ AH vuông góc SB.

Ta có $AH\perp(SBC)$ nên AH chính là khoảng cách từ A đến mp(SBC).

Ta có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}\Leftrightarrow\frac{1}{SA^2}=\frac{1}{AH^2}-\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{a^2}$.

Suy ra $SA = a$. Thể tích cần tính là $V = \frac{1}{3}a.a.a = \frac{a^3}{3}$.

Câu 34: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD)

A. $h = \frac{2}{3}a$ **B.** $h = \frac{4}{3}a$ **C.** $h = \frac{8}{3}a$ **D.** $h = \frac{3}{4}a$

Lời giải

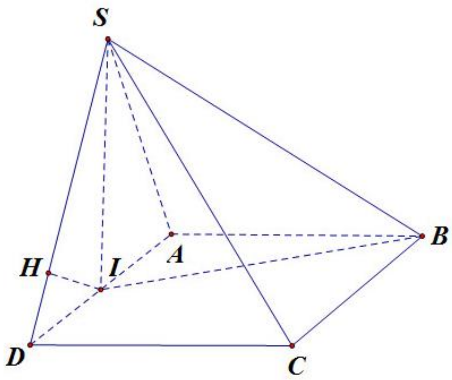
Chọn B

Gọi I là trung điểm của AD. Tam giác SAD cân tại S

$\Rightarrow SI \perp AD$

Ta có $\begin{cases} SI \perp AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SI$ là đường cao của hình chóp.



Theo giả thiết $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SI.S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3 = \frac{1}{3}SI.2a^2 \Leftrightarrow SI = 2a$

Vì AB song song với (SCD)

$\Rightarrow d(B,(SCD)) = d(A,(SCD)) = 2d(I,(SCD))$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên SD.

Mặt khác $\begin{cases} SI \perp DC \\ ID \perp DC \end{cases} \Rightarrow IH \perp DC$. Ta có $\begin{cases} IH \perp SD \\ IH \perp DC \end{cases} \Rightarrow IH \perp (SCD) \Rightarrow d(I,(SCD)) = IH$

Xét tam giác SID vuông tại I: $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{ID^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{2a^2} \Rightarrow IH = \frac{2a}{3}$

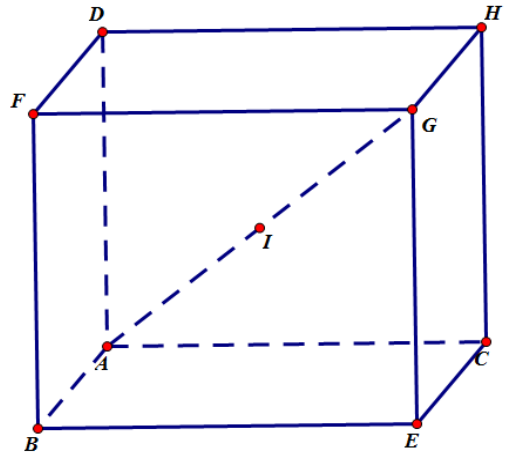
$\Rightarrow d(B,(SCD)) = d(A,(SCD)) = 2d(I,(SCD)) = \frac{4}{3}a$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;2)$ và đi qua điểm $A(1;-2;-1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 72 **B.** 216 **C.** 108 **D.** 36

Lời giải

Chọn D



Ta có: $AI=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=3\sqrt{3}$.

Dựng hình hộp chữ nhật $ABEC.DFGH$

I là tâm mặt cầu ngoại tiếp $A.BCD$ $\Rightarrow I$ là trung điểm của $AG \Rightarrow AG=2AI=6\sqrt{3}$.

Đặt $AB=x,\ AC=y,\ AD=z$, ta có: $AG^2=AB^2+AC^2+AD^2$

$\Rightarrow 108=x^2+y^2+z^2\overset{Co-si}{\geq}3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\Rightarrow xyz\leq\sqrt{36^3}=216$.

Lại có: $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}xyz\leq\dfrac{1}{6}.216=36$.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=6$.

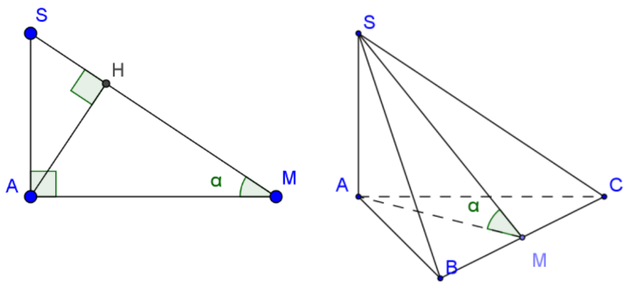
Vậy $\max V_{ABCD}=36$.

Câu 36: Xét khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC), tính $\cos\alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

A. $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm BC, H là giao điểm của đường thẳng qua A và vuông góc với SM. Ta được:

Góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) là SMA.

$AM\dfrac{3}{\sin\alpha};\ SA=\dfrac{3}{\cos\alpha};\ AM=\dfrac{1}{2}BC.$

Suy ra $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.AM^2.SA=\dfrac{9}{\sin^2\alpha.\cos\alpha}$.

Thể tích khối chóp nhỏ nhất khi $\sin^2\alpha.\cos\alpha$ lớn nhất.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\sin^2 x.\cos x=\cos x-\cos^3 x$ với $0<x<\dfrac{\pi}{2}$

$$f'\left(x\right)=-\sin x+3\cos x.\sin x,\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$

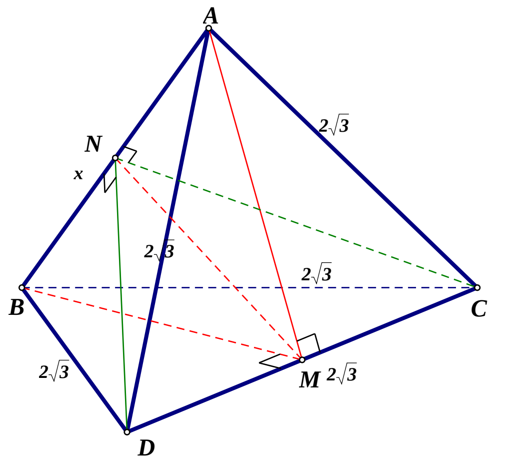
Suy ra $\sin^2\alpha.\cos\alpha$ lớn nhất khi $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 37: Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB=x$ và các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x=\sqrt{6}$ **B.** $x=\sqrt{14}$ **C.** $x=3\sqrt{2}$ **D.** $x=2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C



Gọi M,N lần lượt là trung điểm của CD và AB.

Ta có $\left.\begin{array}{l}CD\perp MB\\ CD\perp MA\end{array}\right\}\Rightarrow CD\perp\left(MAB\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}CD\perp MN\\ CD\perp AB\end{array}\right.$.

Tam giác MAB cân tại M nên $MN\perp AB$.

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.d\left(AB,CD\right).\sin\left(AB,CD\right)=\frac{1}{6}x.2\sqrt{3}.MN.\sin 90^\circ$$

$$=\frac{1}{6}x.2\sqrt{3}.\sqrt{3^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}x.\sqrt{36-x^2}\le\frac{\sqrt{3}}{6}.\left[\frac{x^2+\left(36-x^2\right)}{2}\right]=3\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\sqrt{36-x^2}\Leftrightarrow x=3\sqrt{2}$.

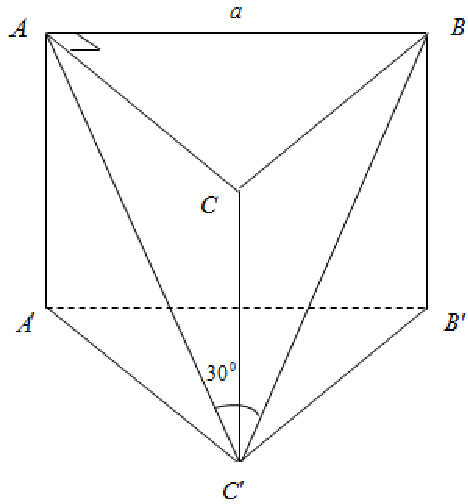
Vậy với $x=3\sqrt{2}$ thì V_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất bằng $3\sqrt{3}$.

Câu 38: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$ bằng 30°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{1}{8}a^3$. **B.** $\dfrac{3}{8}a^3$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Diện tích đáy: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACC'A') \Rightarrow (BC',(ACC'A')) = \widehat{BC'A} = 30°$.

Khi đó $AC' = AB.\cot 30° = a\sqrt{3} \Rightarrow AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy, thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V = S_{ABC}.AA' = \frac{a^2}{2}.a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.a^3$.